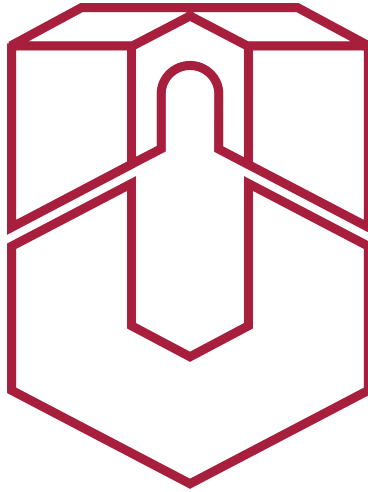


UNIVERSITÄT OSNABRÜCK
STATISTISCHE PHYSIK



BACHELORARBEIT

**Prüfung eines stochastischen Modells für
Windgeschwindigkeiten anhand von über der
Nordsee gemessenen Daten mit hoher Zeitauflösung**

Knut Domke

Erstprüfer
PROF. DR. PHILIPP MAAß

Zweitprüfer
M. SC. SO-KUMNETH SIM

16. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen und Datenverarbeitung	3
2.1	Stochastischer Prozess	3
2.2	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	3
2.3	Stationarität	3
2.4	Autokorrelationsfunktion	4
2.5	Spektrale Dichte	4
2.6	Wiener-Khinchin-Theorem	5
2.7	Daten und Datenverarbeitung	5
3	Simulation des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses	7
3.1	Historischer Hintergrund und Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses	7
3.2	Numerische Lösung mit dem Euler-Maruyama-Verfahren	10
3.3	Vergleich mit der Theorie	11
4	Windanalyse	13
4.1	Was ist Wind eigentlich?	13
4.2	Analysemethoden und -ergebnisse	18
5	Windsimulation	25
5.1	Windmodell nach Kamps und Schmietendorf	25
5.2	Abschätzung der Parameter	27
5.3	Parameterwahl und Optimierung	28
5.3.1	Wahrscheinlichkeitsdichten der Geschwindigkeit v	31
5.3.2	Geschwindigkeitsinkrement $\Delta_1 v$	35
5.3.3	Momente der Inkremente	36
5.3.4	Inkrementverteilungen für verschiedene τ	41
6	Zusammenfassung und Ausblick	43

Kapitel 1

Einleitung

Die Welt hat ein Emissionsproblem klimaschädlicher Gase, weshalb der vermehrte Einsatz erneuerbarer Energien maßgeblich dazu beitragen soll, eine Wende in der Energieproduktion, weg von konventionellen Ressourcen, insbesondere Kohle, Öl und Gas, herbeizuführen. Die Menge der in der Atmosphäre auch natürlich vorkommenden Treibhausgase erhöht sich seit Jahrzehnten ununterbrochen. Ursächlich ist dafür unter anderem die Nutzung fossiler Brennstoffe, die Viehzucht und auch die großflächige Abholzung von Wäldern. Ein großer Anteil entfällt hierbei auf die Energieversorgung [Wat18], denn hier werden zum Beispiel bei der Verbrennung von Kohle und Gas sehr viel Kohlenstoffdioxid und Stickoxide ausgestoßen. Ziel ist es, auf emissionsarme Konzepte zur Stromerzeugung umzusteigen. Die Windkraft stellte in Deutschland im Jahr 2020 mit 23,3 Prozent [Ene20] den größten Anteil an der elektrischen Energieversorgung dar. Dennoch haben alle erneuerbaren Energieträger zusammen mit 44,1 Prozent weiterhin einen geringeren Anteil an der Bruttostromerzeugung als die fossilen Energieträger. Umso wichtiger ist daher eine effiziente Nutzung der erneuerbaren Energieträger, insbesondere der verfügbaren Windkraft. Dieser Anteil soll in Zukunft stetig ausgebaut werden, wobei eine stabile Einspeisung erhöhter Mengen in die bestehenden Stromnetze eine technische Herausforderung darstellt.

Ein wichtiger Aspekt ist dabei die Simulation von Windgeschwindigkeiten und die sich aus ihr ergebende eingespeiste Windenergieleistung. Die Windgeschwindigkeiten weisen ein turbulentes Verhalten auf, weshalb in der Industrie und Klimaforschung versucht wird, sie mit Hilfe von mathematischen Modellen auf Basis stochastischer Prozesse vorherzusagen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die stochastischen Eigenschaften des in [SPK17] vorgeschlagenen mathematischen Modells mit denen echter Daten der Forschungsplattform FINO1 zu vergleichen. Die verwendeten Daten weisen eine besonders hohe Zeitauflösung von 1 Hz auf, was es ermöglicht, auch das Kurzzeitverhalten der FINO1-Daten zu analysieren und mit dem des mathematischen Modells zu vergleichen.

Ein Teil des Windmodells basiert auf dem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, weshalb sich der erste Teil der Arbeit mit einer Einführung in diesen Prozess und der Langevin-Gleichung im Allgemeinen befasst. Des Weiteren wird die atmosphärische Turbulenz auf Grundlage der Turbulenztheorie untersucht.

Kapitel 2

Grundlagen und Datenverarbeitung

In diesem Kapitel werden die verwendeten Daten und ihre Verarbeitung beschrieben. Ebenso werden die verwendeten Grundbegriffe der Statistik erläutert.

2.1 Stochastischer Prozess

Ein stochastischer Prozess kann als eine Funktion $v(t)$ angesehen werden, welche zu jeder Zeit t einen zufälligen Wert annimmt. Wird von einer Realisierung eines solchen stochastischen Prozesses gesprochen, so ist $v(t)_\Omega$ eine konkrete Funktion, die aus einem Satz Ω von Parametern für den Prozess resultiert. Eine Vielzahl an Realisierungen mit dem selben Satz Ω von Parametern wird als Ensemble bezeichnet.

2.2 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion [engl. probability density function (PDF)]

$$p(v, dv) = P(v \in [v, v + dv]) \quad (2.2.1)$$

erlaubt es, die Wahrscheinlichkeit dafür anzugeben, den Wert v eines stochastischen Prozesses innerhalb eines Intervalls $[v, v + dv)$ vorzufinden. Genauer handelt es sich hier um die 1-Punkt-Wahrscheinlichkeitsdichte. Sie ist eine wichtige Größe in der Zeitreihenanalyse.

2.3 Stationarität

Ein stochastischer Prozess $v(t)$ wird als stark stationär definiert, wenn alle n -Punkt-Wahrscheinlichkeitsdichten invariant bezüglich Zeittranslationen sind. Dieses Kriterium ist für viele Anwendungen meist zu restriktiv, weshalb auch die Definition der schwachen Stationarität eingeführt wird. Damit ein Prozess als schwach stationär

bezeichnet werden kann, müssen der Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion invariant gegenüber Zeittranslationen sein. Zusätzlich muss die Varianz für alle t endlich sein.

2.4 Autokorrelationsfunktion

Die Korrelation ist ein Maß für die lineare Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen. Die Autokorrelation wiederum ist die Korrelation einer Zufallsvariablen $v(t)$ mit sich selbst zu einem späteren Zeitpunkt $v(t + \tau)$. Die Autokorrelationsfunktion [engl. autocorrelation function (ACF)]

$$C(\tau) = \frac{\langle v(t)v(t + \tau) \rangle_t}{\sigma_v^2} = \frac{1}{(T_N - \tau)\sigma_v^2} \sum_{t=1}^{T_N - \tau} v(t)v(t + \tau) \quad (2.4.1)$$

gibt diese Beziehung in Abhängigkeit von der Verschiebung τ an. Die Division durch die Varianz σ_v^2 sorgt für eine Normierung der Autokorrelationsfunktion, sodass sie Werte zwischen -1 und 1 annimmt. Der Beobachtungszeitraum wird mit T_N angegeben. Bei Zeitreihen handelt es sich bei τ zudem um eine Zeitdifferenz, weshalb auch häufig von „lag“ gesprochen wird. Ein Wert von $C = 1$ ist der maximale Wert der Funktion und bedeutet maximale Korrelation. Die um τ verschobene Zeitreihe $v(t + \tau)$ ist dann maximal ähnlich zu $v(t)$. Dies ist für $\tau = 0$ immer der Fall. Während eine positive ACF bedeutet, dass sich $v(t + \tau)$ zusammen mit $v(t)$ im Mittel vergrößert, so bedeutet eine negative ACF, dass sich bei Vergrößerung von $v(t)$, $v(t + \tau)$ im Mittel verkleinert. Für $C \rightarrow 0$ existiert nur minimale Korrelation und damit minimale lineare Abhängigkeit zwischen der verschobenen und der Ausgangszeitreihe.

2.5 Spektrale Dichte

Ein Signal kann in Schwingungen verschiedener Frequenzen zerlegt werden. Diesen Schwingungen kann je Frequenz eine Amplitude zugeordnet werden. Die spektrale Dichte beschreibt die Verteilung der Leistung auf die Frequenzen dieses Signals. Bei Existenz und Kenntnis der Fouriertransformierten $\hat{v}(f)$ eines stochastischen Prozesses $v(t)$ kann die spektrale Dichte mit

$$S(f) = \frac{2}{T_N} |\hat{v}(f)|^2 \quad (2.5.1)$$

berechnet werden. Hierbei ist T_N der Beobachtungszeitraum des Prozesses. Mit der spektralen Dichte, häufig auch Spektrum genannt, kann ein stationärer, stochastischer Prozess auf Periodizitäten und Korrelationseigenschaften hin untersucht werden. Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen dem Spektrum $S(f)$ und der ACF $C(\tau)$ für schwach stationäre Zeitreihen erläutert.

2.6 Wiener-Khinchin-Theorem

Im Allgemeinen existiert für die meisten stochastischen Prozesses keine Fouriertransformierte. Die spektrale Dichte kann somit nicht durch Gleichung (2.5.1) bestimmt werden. Es kommt daher häufig das Wiener-Khinchin-Theorem

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad \text{mit } r(\tau) = C(\tau) \cdot \sigma_v^2 \quad (2.6.1)$$

zum Tragen. Das Wiener-Khinchin-Theorem besagt, dass die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion $r(\tau)$ eines schwach stationären stochastischen Prozesses $v(t)$ der spektralen Dichte $S(f)$ des Prozesses entspricht. Die Autokorrelationsfunktion $r(\tau)$ wird durch Gleichung (2.4.1) bestimmt. Gleichung (2.6.1) lässt sich mit der eulerschen Formel $e^{ix} = i \sin(x) + \cos(x)$ in einen komplexen und einen reellen Term aufteilen. Da im Allgemeinen reelle Prozesse betrachtet werden, ist $r(\tau)$ ebenso reell und der Term mit $i \sin(x)$ kann Null gesetzt werden. Es handelt sich bei dem zweiten Term $\cos(x)$ um eine symmetrische Funktion, weshalb sich Gleichung (2.6.1) zu

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} r(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \quad \text{mit } r(\tau) = C(\tau) \cdot \sigma_v^2 \quad (2.6.2)$$

umschreiben lässt.

2.7 Daten und Datenverarbeitung

Das Forschungs- und Entwicklungszentrum der Fachhochschule Kiel betreibt mehrere Forschungsplattformen in der Nord- und Ostsee. Die benötigten Daten zur Analyse des Windes stammen von der FINO1-Forschungsplattform, die sich etwa 45 Kilometer nördlich von Borkum befindet. Auf ihr werden meteorologische und ozeanographische Daten gemessen.

Für diese Arbeit sind die Windgeschwindigkeiten von Interesse. Diese Daten werden mittels Windschalenanemometer gemessen. Diese Anemometer befinden sich auf verschiedenen Höhen. Die Geschwindigkeiten werden in Metern pro Sekunde mit einer hohen zeitlichen Auflösung von 1 Hz aufgenommen und gespeichert.

Der betrachtete Messzeitraum umfasst 20 Monate und spannt sich von September 2015 bis April 2017. Damit ergibt sich ein Datensatz von insgesamt etwa $5,2 \cdot 10^7$ Werten. Die Messhöhe des Anemometers beträgt $z = 100$ m.

Aufgrund von technischen Ausfällen oder anderen unbekanntem Störquellen enthalten die Rohdaten zum Teil fehlende oder fehlerhafte Messwerte. Solche fehlerhaften Abschnitte werden durch „NaN“ (not a number) ersetzt, da sie das Resultat von Fehlfunktionen der Messapparatur sind. Durch die fehlerhaften Messwerte wird beispielsweise die maximale Windgeschwindigkeit verfälscht. Vor der Korrektur, bei der die fehlerhaften Messwerte durch NaN ersetzt werden, beträgt sie ungewöhnlich hohe $73,6 \text{ ms}^{-1}$. Nach der Korrektur liegt der Maximalwert bei realistischeren $37,2 \text{ ms}^{-1}$.

Es werden verschiedene Datensätze erstellt. Zum einen wird die ganze Zeitreihe mit allen NaN betrachtet. Ausgegangen wird dabei von einer kombinierten Zeitreihe, bei der die Daten aller Monate aneinander hängen und ineinander übergehen. Zum anderen werden auch die längsten zusammenhängenden Abschnitte, in denen es nur einzelne, nicht aufeinanderfolgende NaN gibt, gesucht und als einzelne Abschnitte abgespeichert. Einzelne NaN werden bei Bedarf durch das arithmetische Mittel der benachbarten Datenpunkte interpoliert. Dies ist beispielsweise für die Berechnung eines Fourierspektrums wichtig, da sich mit einer lückenhaften Zeitreihe ohne Weiteres nicht der volle Frequenzbereich darstellen lässt und weiterer Aufwand betrieben werden müsste [Son+15]. Andere Analysen, wie zum Beispiel eine einfache Windgeschwindigkeits-PDF können dagegen mit dem vollen zusammenhängenden, lückenbehafteten Datensatz erstellt werden. Die Verarbeitung der Daten und das Auffinden der NaN-freien Abschnitte findet auf Basis der in [Sim20] dargelegten Überlegungen und Analysen statt.

Kapitel 3

Simulation des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

In diesem Kapitel werden der historische Hintergrund und die Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses sowie die numerische Lösung der stochastischen Differentialgleichung beleuchtet. Außerdem werden die Simulationsergebnisse mit der Theorie für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess verglichen.

3.1 Historischer Hintergrund und Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

Der schottische Botaniker Robert Brown beschrieb 1827 als einer der ersten das Phänomen der später nach ihm benannten Brownschen Bewegung [Bro28]. Er beobachtete Blütenpollen unter dem Mikroskop, die sich in einem Wasserbad befanden. Die Pollen führten eine zufällige, ungerichtete Zitterbewegung in dem Wasserbad aus. Diese Zitterbewegung ließ Brown vermuten, dass es sich um eine „lebendige“ Bewegung handelte. Spätere Experimente mit anorganischen Teilchen konnten diese Vermutung widerlegen. Dennoch war noch ungeklärt, wie es zu der Bewegung kam. Christian Wiener konnte 1863 nach weiteren Experimenten die Vermutung weiter festigen, dass die von Brown und mittlerweile einigen anderen Wissenschaftlern beobachtete Bewegung durch Stöße mit den umgebenden, im Mikroskop nicht sichtbaren, Flüssigkeitsteilchen auftritt.

Einstein entwickelte 1905 einen theoretischen Ansatz zur Erklärung des Phänomens, bei dem er von der molekularkinetischen Theorie der Wärme ausging [Ein05]. Er kam zu dem Ergebnis, dass die von ihm theoretisch gefundene Bewegung möglicherweise identisch zu der Brownschen Molekularbewegung ist. Für ein abschließendes Urteil darüber waren ihm die zugänglichen Angaben und Ergebnisse aber zu ungenau. Drei Jahre nach Einsteins Veröffentlichung konnte Jean Baptiste Perrin die von Einstein entwickelten Formeln experimentell bestätigen, was einen großen Fortschritt für den Nachweis der Existenz von Atomen und Molekülen darstellte [Per09]. Für seine Erkenntnisse erhielt Perrin 1926 den Nobelpreis für Physik.

Einstein entwickelte in seiner Arbeit [Ein05] eine erste Form der Einstein-Smo-

luchowski-Relation

$$D = \mu k_B T = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}. \quad (3.1.1)$$

Mit ihr werden die Diffusionskonstante D mit der Mobilität μ der Teilchen, der Temperatur T und der Boltzmann-Konstante k_B in Verbindung gebracht. Die Diffusionskonstante D dient zum Beispiel in den Fickschen Gesetzen als Transportkoeffizient zur Berechnung des thermisch bedingten Stofftransports, der aus der zufälligen Bewegung der Teilchen resultiert. Als Maß für die Beweglichkeit der Teilchen kann $D = \langle |\Delta x(t)|^2 \rangle / 2t$ über die mittlere quadratische Verschiebung $\langle |\Delta x(t)|^2 \rangle$ pro Zeit t bestimmt werden [Ein05]. Dabei ist $\langle |\Delta x(t)|^2 \rangle = \langle |x^{(i)}(t) - x^{(i)}(0)|^2 \rangle_i$ und $x^{(i)}(t)$ bezeichnet die Position des i -ten Teilchens zum Zeitpunkt t . Die Mobilität $\mu = 1/(6\pi\eta r)$ in Gleichung (3.1.1), häufig auch Beweglichkeit genannt, berechnet sich aus dem Radius r des Teilchens und der Viskosität η des Wassers. Dabei ist $\mu = 1/\gamma_s$ der inverse Stokesche Reibungskoeffizient. Allgemein gilt die Beziehung $\vec{v}_s = \mu \vec{F}$ mit der stationären Geschwindigkeit \vec{v}_s , die genau dann erreicht ist, wenn die angreifende Kraft \vec{F} und die entgegengesetzte Reibungskraft betragsmäßig gleich sind, da dann die effektive Beschleunigung bei null liegt. Solange jedoch die Reibungskraft kleiner als die angreifende Kraft ist, bewirkt die angreifende Kraft eine Beschleunigung des Teilchens. Anschaulich betrachtet beschreibt die Einstein-Smoluchowski-Relation die Beziehung zwischen den mikroskopischen und den makroskopischen Größen der Teilchendiffusion.

1908 im selben Jahr, in dem Perrin seine Ergebnisse publizierte, entwickelte und veröffentlichte Paul Langevin unter Zuhilfenahme der Erkenntnisse Einsteins [Ein05] eine Gleichung zur Beschreibung der Brownschen Bewegung von Teilchen in einem Fluid [Lan08]. Diese Gleichung wurde später nach ihm benannt und lautet:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dV(x)}{dx} - \gamma \frac{dx}{dt} + \sqrt{2D}\eta(t). \quad (3.1.2)$$

Dabei ist m die Masse des Teilchens, x seine Position und $V(x)$ das Potential in dem es sich befindet. Außerdem ist $\gamma = 1/\mu$ ein Reibungskoeffizient und $\eta(t)$ ein Gauß'sches weißes Rauschen mit der Amplitude $\sqrt{2D}$ und den Eigenschaften

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (3.1.3)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (3.1.4)$$

Die erste Eigenschaft sichert die Bedingung, dass die zufällige Kraft im Mittel ungerichtet sein muss. Die zweite Eigenschaft steht für die δ -Korrelation des Rauschens, das heißt, keiner der zufälligen Werte ist mit einem Wert zu einem anderen Zeitpunkt korreliert. Sie sind statistisch voneinander unabhängig.

Für Zeitskalen $t \gg m/\gamma$ kann der Trägheitsterm md^2x/dt^2 in Gleichung (3.1.2) vernachlässigt werden und es folgt daraus die überdämpfte Brownsche Bewegung

$$\gamma \frac{dx}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx} + \sqrt{2D}\eta(t). \quad (3.1.5)$$

Beim Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OUP)

$$\gamma \frac{dx}{dt} = -kx + \sqrt{2D}\eta(t). \quad (3.1.6)$$

handelt es sich um eine Brownsche Bewegung in einem harmonischen Potential mit $V(x) = (1/2)kx^2$. Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist ein stationärer stochastischer Prozess. Zudem hat er für $t \rightarrow \infty$ und $k > 0$ einen stabilen Fixpunkt x^* , der gleich dem Mittelwert $\langle x(t) \rangle_t$ ist. Deshalb wird der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess auch als mean-reverting process bezeichnet [VP19].

Da sich der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess beschrieben durch Gleichung (3.1.6) analytisch lösen lässt [UO30], werden einige Eigenschaften bestimmt, die im weiteren Verlauf der Überprüfung der numerischen Simulation dienen. Der Reibungskoeffizient wird im Folgenden auf $\gamma = 1$ gesetzt. Bei der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sigma_x(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x(t)}{\sigma_x(t)}\right)^2\right\} \quad (3.1.7)$$

für den Prozess handelt es sich um eine Gaußverteilung mit dem Mittelwert

$$\mu_x(t) = \langle x \rangle = x_0 e^{-kt}, \quad (3.1.8)$$

und der Varianz

$$\sigma_x^2(t) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{D}{k} (1 - e^{-2kt}). \quad (3.1.9)$$

Für die Autokorrelationsfunktion $C(\tau)$ im stationären Zustand ergibt sich

$$C(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle_t}{\sigma_x^2} = \frac{D}{\sigma_x^2 k} e^{-k\tau}. \quad (3.1.10)$$

Die spektrale Dichte kann mit dem Wiener-Khinchin-Theorem aus der Autokorrelation berechnet werden, da es sich bei dem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess um einen stationären Prozess handelt [Ait02; WU45]. Es folgt damit für die spektrale Dichte

$$S(f) = \frac{2D}{4\pi^2 f^2 + k^2}. \quad (3.1.11)$$

3.2 Numerische Lösung mit dem Euler-Maruyama-Verfahren

Um einzelne Realisierungen des OUP darzustellen wird ein numerische Lösungsverfahren angewendet. Dazu bietet sich das Euler-Maruyama-Verfahren an, welches eine Erweiterung des Euler-Verfahrens für gewöhnliche Differentialgleichungen auf stochastische Differentialgleichungen darstellt [Mar55]. Dafür wird Gleichung 3.1.6 für ein kleines Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ integriert und die Integrale

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{dx(t')}{dt'} &= \underbrace{-k \int_t^{t+\Delta t} dt' x(t')}_A + \underbrace{\sqrt{2D} \int_t^{t+\Delta t} dt' \eta(t')}_B \\ \Rightarrow x(t + \Delta t) &= x(t) - kx(t)\Delta t + \sqrt{2D\Delta t}\eta(t) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

wiederum approximiert. Es handelt sich bei dem Integral A um ein Lebesgue-Integral. Es kann mit dem Funktionswert $x(t)$ zu Beginn des Intervalls mit der Intervalllänge Δt multipliziert, in erster Ordnung approximiert werden. Das Integral B ist ein stochastisches Ito-Integral und für Näheres zur Theorie dieser Integrale wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen [Bal17].

Wie wir sehen, führt die Integralapproximation für $\Delta t \rightarrow 0$ zu einem führenden Term der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$. Der Rauschterm mit $\eta(t)$ dominiert somit für kleine Δt . Die Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$ lässt sich erklären, indem die stochastische Variable $\zeta(\Delta t)$:

$$\zeta(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} dt \eta(t) \quad (3.2.2)$$

betrachtet wird. Als Summe beziehungsweise als Integral Gaußscher Zufallsvariablen ist $\zeta(\Delta t)$ gaußverteilt. Für den Mittelwert gilt damit

$$\langle \zeta(\Delta t) \rangle_t = \int_t^{t+\Delta t} dt \langle \eta(t) \rangle_t = 0 \quad (3.2.3)$$

und für die Varianz

$$\langle \zeta(\Delta t)^2 \rangle_t = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_t^{t+\Delta t} dt' \underbrace{\langle \eta(t)\eta(t') \rangle_t}_{2\delta(t-t')} = 2\Delta t. \quad (3.2.4)$$

Demzufolge ist $\zeta(\Delta t)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$ und für jede Approximation des Integrals von $\zeta(\Delta t)$ erhalten wir einen führenden Term eben dieser Ordnung.

Lösungsverfahren höherer Ordnung bieten hier im Allgemeinen aufgrund des stochastischen Terms keinen nennenswerten Vorteil, weshalb sich das Euler-Maruyama-Verfahren für die numerische Lösung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses gut eignet.

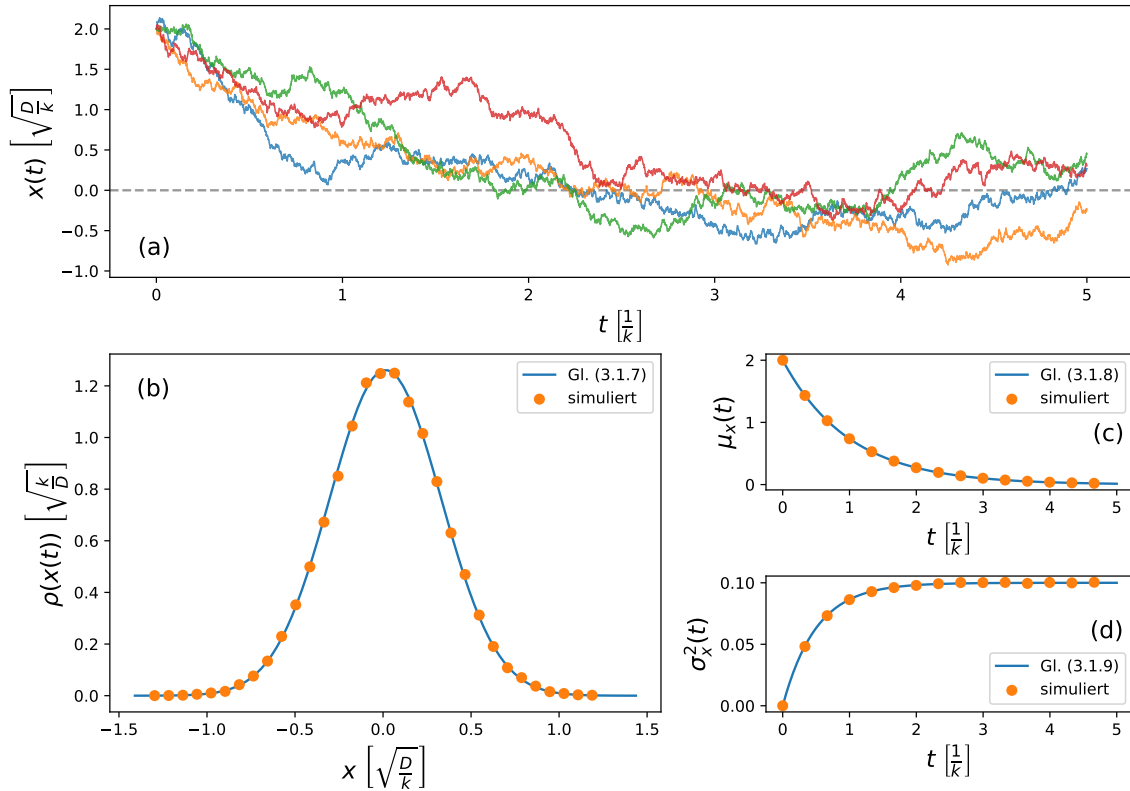


Abbildung 3.1: Simulation des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses für $x_0 = 2$, $k = 1$ und $D = 0.1$ von $t = 0$ bis $t = 5$: (a) Vier einzelne Realisierungen, (b) Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung für $t = 5$, sowie (c) der Mittelwert und (d) die Varianz im zeitlichen Verlauf für 10^5 Realisierungen.

Im Folgenden wird die numerische Lösung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Theorie verglichen.

3.3 Vergleich mit der Theorie

Da sich der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess analytisch behandeln lässt, können die Eigenschaften der numerisch simulierten Realisierungen mit der Theorie verglichen werden. Dazu wurden zunächst 10^5 Realisierungen zu einem Satz von Parametern generiert. In Abbildung 3.1 (a) sind die ersten vier dieser Realisierungen beispielhaft dargestellt. Das stochastische Verhalten und der Fixpunkt $x^* = 0$ sind in ihren Verläufen gut zu erkennen. Die in Abbildung 3.1 (b) dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\rho[x(t = 5)]$ zum Zeitpunkt $t = 5$, (c) ihr Mittelwert $\langle x \rangle$ und (d) ihre Varianz $\langle x^2 \rangle$ in Abhängigkeit von der Zeit stimmen sehr gut mit den theoretischen Erwartungen überein. Es zeigt sich, wie in Gleichung (3.1.7) dargestellt, eine Gaußverteilung.

In Abbildung 3.2 (a) ist die Autokorrelationsfunktion des simulierten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses und in 3.2 (b) das Spektrum des simulierten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses zusammen mit den theoretischen Erwartungen aus Gleichung (3.1.10) und (3.1.11) zu sehen. In der ACF ist die typische Abnahme der Korrelation nach der

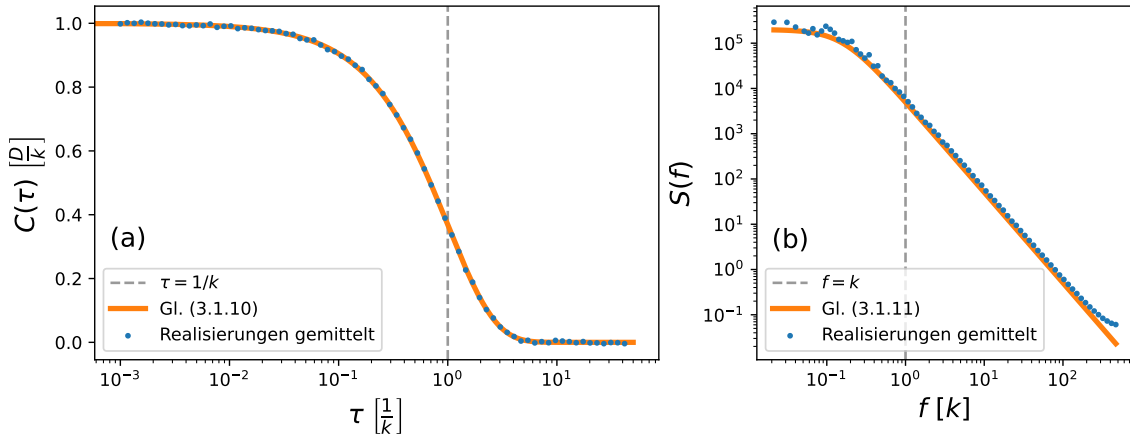


Abbildung 3.2: ACF und Spektrum des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses für $x_0 = 2$, $k = 1$ und $D = 0.1$

charakteristischen Zeit $\tau = 1/k = 1$ zu sehen. Die ACF folgt sehr gut der Theorie nach Gleichung (3.1.10). Auch das in (b) gezeigte Spektrum folgt der theoretischen Erwartung nach Gleichung (3.1.11) sehr exakt. Die einzige größere Abweichung liegt im hochfrequenten Bereich und ist durch den Aliasing Effekt zu erklären. Der zunächst flache Verlauf im niedrigfrequenten Bereich resultiert aus dem harmonischen Potential, daraufhin folgt ein Übergangsbereich und anschließend der Bereich der freien Diffusion, in welchem $S(f) \sim f^{-2}$ ist. Der Bereich der freien Diffusion beginnt bei der eingezeichneten charakteristischen Frequenz $f = k = 1$.

Es zeigt sich, dass die Simulationsergebnisse sehr genau mit der Theorie übereinstimmen. Der implementierte Ornstein-Uhlenbeck-Prozess wird in Kapitel 5 für das Windmodell verwendet werden.

Mittlung des Spektrums

Im Gegensatz zur ACF ist der eigentliche Verlauf des Spektrums des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ohne weitere Mittelung aufgrund von starken Fluktuationen nur schwer ersichtlich. Es werden deshalb die Einzelspektren durch auf logarithmischer Skala äquidistante Bins gemittelt. Anschließend wird das Gesamtspektrum durch das arithmetische Mittel über alle Einzelspektren bestimmt:

$$S(f) = \frac{1}{n_i} \sum_i^{n_i} S_i(f). \quad (3.3.1)$$

Kapitel 4

Windanalyse

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 2 vorgestellten FINO1-Daten auf ihre statistischen Eigenschaften hin untersucht. Näher betrachtet werden dazu die PDF für verschiedene Zeitintervalle τ des gesamten Datensatzes, die spektrale Dichte, die PDF der Geschwindigkeitsinkremente für verschiedene τ und die Strukturfunktionen dritter und vierter Ordnung. Die Analysen dienen später der Überprüfung, inwieweit das zu untersuchende Windmodell die gefundenen Eigenschaften reproduzieren kann.

Zuvor wird kurz beleuchtet, was Wind ist und wie er auftritt, um eine Einführung in das Thema zu geben. Turbulenztheorien werden anschließend mit den Analysen der Windstatistik in Verbindung gebracht.

4.1 Was ist Wind eigentlich?

Für die turbulenztheoretische Betrachtung des Spektrum stellt sich zunächst die Frage, was Wind eigentlich ist. Die Ursache für Wind im Allgemeinen sind Luftdruckgradienten, welche in der Atmosphäre großskalig hauptsächlich aus Temperaturgradienten entstehen. Sie sorgen dafür, dass sich Luftteilchen aus Gebieten höheren Drucks zu Gebieten niedrigeren Drucks bewegen. Daraus resultieren Strömungen von Luftteilchen verschiedenster Geschwindigkeiten. Diese Strömungen bilden den Wind.

Generell wird zwischen zwei verschiedenen Strömungsarten unterschieden, und zwar der laminaren und der turbulenten Strömung. Welche dieser beiden Arten auftritt hängt von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} , der kinematischen Viskosität ν der Luft und einer charakteristischen Länge L des Systems ab. Diese drei Größen werden mit der dimensionslosen Reynoldszahl $Re = (\bar{v}L)/\nu$ zusammengefasst. Unterhalb eines kritischen Schwellenwertes Re_{krit} wird die Strömung von laminarem, oberhalb dagegen von turbulentem Strömungsverhalten dominiert [SG06]. Konkrete Schwellenwerte Re_{krit} sind abhängig von dem jeweils betrachteten System und können nicht verallgemeinert werden.

Bei laminarer Strömung bewegt sich die Luft in Schichten, die sich nicht miteinander vermischen. Die Stromlinien sind parallel zueinander. Steigt nun zum Bei-

spiel in einem System die Strömungsgeschwindigkeit bei ansonsten gleichbleibenden Eigenschaften des Mediums an, so wird auch die Reynoldszahl größer. Ab einem Schwellenwert Re_{krit} dominiert die turbulente Strömung. Das Medium bewegt sich dann nicht mehr in Schichten und es treten stattdessen Verwirbelungen auf. Die Stromlinien sind chaotisch und nicht mehr parallel zueinander.

Turbulente Strömungen werden weiterhin in zweidimensionale (2D) und dreidimensionale (3D) Turbulenz unterteilt. Für 3D-Turbulenz findet, wie der Name impliziert, ein Teilchenaustausch in alle drei Raumrichtungen und für 2D-Turbulenz nur in zwei Raumrichtungen statt.

Dreidimensionale Turbulenz

Es sei ein System betrachtet, in dem dreidimensionale turbulente Strömungen auftreten und dem von außen auf der größten Längenskala L , auch Injektionsbereich genannt, konstant Energie zugeführt wird. Als Inertialbereich l werden Längenskalen $\lambda \leq l \leq L$ zusammengefasst. Sie stellen einen Übergang zur Kolmogorow-Längenskala λ , dem Dissipationsbereich, dar.

Im Injektionsbereich entstehen große Turbulenzstrukturen, im Folgenden „Wirbel“ genannt, durch die äußere Energiezufuhr. Wirbel sind gekennzeichnet durch räumlich korrelierte Geschwindigkeitsfluktuationen auf einer Skala l . Sie tragen kinetische Energie in sich und zerfallen mit der Zeit in immer kleinere Wirbel. Dieser fortlaufende Zerfall stoppt erst, wenn die Kolmogorow-Längenskala λ im Dissipationsbereich erreicht ist. Es wird also Energie von Wirbeln mit kleinen Wellenzahlen zu Wirbeln mit größeren Wellenzahlen übertragen, was auch als Energiekaskade bezeichnet wird. Im Dissipationsbereich, also im Bereich großer Wellenzahlen, dissipiert die Energie der Wirbel durch die Viskosität zu Wärme.

Im Jahre 1941 leitete Andrey Kolmogorow das bekannte, für den Inertialbereich l gültige, Potenzgesetz für die Energiedichte $E(k)$

$$E(k) = \alpha \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}. \quad (4.1.1)$$

pro Masseneinheit her [Kol91b], indem er unter Dimensionsbetrachtung die Dissipationsrate $\epsilon \sim \bar{v}^3/L$ mit der Wellenzahl $k = 2\pi/l$ verknüpfte. Dabei entspricht α einer Konstanten, die in den darauf folgenden Jahren experimentell bestimmt wurde und etwa $\alpha \approx 1,5$ beträgt [YZ97].

Für Geschwindigkeiten, wie die FINO1-Daten, ist das Spektrum ein Maß für die kinetische Energie je Masseneinheit. Es entspricht einer Energiedichte im Intervall $[k, k+dk)$. Da es sich bei den gemessenen FINO1-Daten um zeitlich aufgelöste Daten handelt, können nur Frequenzspektren gemessen werden. Räumliche Strukturen, wie durch Kolmogorows Potenzgesetz beschrieben, sind so nicht bestimmbar. Mithilfe der im Folgenden eingeführten Annahmen können beide dennoch zusammengebracht werden.

Taylor-Hypothese

Die Geschwindigkeitsfluktuation u an einem Punkt ist die Differenz $u = v - \bar{v}$ zwischen der momentanen Geschwindigkeit v an diesem Punkt und der mittleren Flussgeschwindigkeit \bar{v} . Wenn die relative Turbulenzintensität klein ist, also $u/\bar{v} \ll 1$ gilt, kann die Taylor Hypothese

$$\tau = \frac{l}{\bar{v}} \quad (4.1.2)$$

verwendet werden, wobei l einem räumlichen Abstand und τ einer Zeitdifferenz entspricht. Diese Näherung fußt auf der Annahme, dass der Beitrag von turbulenten Wirbeln zum gerichteten Luftmassentransport nur gering ist. Dadurch kann ein räumliches turbulentes Feld an lediglich einem festen Punkt unter Verwendung von Zeitdifferenzen τ und der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} abgetastet werden. Diese Annahme wird auch als „frozen turbulence taylor hypothesis“ bezeichnet [Sch+11]. Das Potenzgesetz in Gl.(4.1.1) ist unter Annahme der Taylor-Hypothese auch im Frequenzraum zu finden. Das Energiespektrum $E(k)$ entspricht dann dem Frequenzspektrum

$$S(f) \propto f^{-\beta}, \quad (4.1.3)$$

wobei im Inertialbereich für 3D-Turbulenz $\beta = 5/3$ erwartet wird. Ideale Turbulenz liegt vor, wenn $\beta = 5/3$ ist.

Zweidimensionale Turbulenz

Neben der durch Kolmogorow beschriebenen idealen 3D-Turbulenz gibt es auch die ideale 2D-Turbulenz, für die Robert H. Kraichnan 1967 [Kra67] ebenso Potenzgesetze für die Energiedichte im Inertialbereich aufstellte. Die Energiespektren folgen den Potenzgesetzen

$$E(k) \sim \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (4.1.4)$$

und

$$E(k) \sim \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}. \quad (4.1.5)$$

Dabei entspricht η der mittleren quadratischen Vortizität $|\vec{\omega}|^2/2$ mit $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ und wird auch als Enstrophiefluss bezeichnet. Anders als in der idealen dreidimensionalen Turbulenz gibt es in der zweidimensionalen Turbulenz zwei verschiedene Skalenbereiche im Inertialbereich, die zum einen wieder mit $k^{-\frac{5}{3}}$ [Gl. (4.1.4)] und zum anderen mit k^{-3} [Gl. (4.1.5)] skalieren. Der Skalenbereich mit $k^{-\frac{5}{3}}$ umfasst anders als in der idealen 3D-Turbulenz eine inverse Energiekaskade, bei der die Energie von größeren zu kleineren Wellenzahlen übertragen wird. Für größere Wellenzahlen folgt das Energiespektrum dem Potenzgesetz $E(k) \sim k^{-3}$. Es tritt hier keine Energie-, sondern eine Enstrophiekaskade von kleineren zu größeren Wellenzahlen auf. Die kinetische Energie E und die Enstrophie $|\vec{\omega}|^2/2$ sind in isotroper 2D-Turbulenz

Erhaltungsgrößen [Kra67].

Unter Annahme der Taylor-Hypothese sind für 2D-Turbulenz im Inertialbereich $\beta = 5/3$ und $\beta = 3$ zu erwarten, wenn β gemäß Gl. (4.1.3) das Skalenverhalten im Frequenzbereich charakterisiert.

Atmosphärische Turbulenz lässt sich bis zur einer Längenskala z , die der Messhöhe der Windgeschwindigkeiten entspricht, durch ideale 3D-Turbulenz und das Potenzgesetz von Kolmogorow beschreiben. Für größere Längenskalen ist dies nicht mehr möglich. Hier tritt zunächst eine sogenannte „spektrale Lücke“ (engl. „spectral gap“) auf. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass sie, anders als bei der 3D- und 2D-Turbulenz, nicht durch ein Potenzgesetz im Spektrum charakterisiert werden kann. Ihre Eigenschaften hängen zudem von der Messhöhe ab [LLP16]. Betrachtet man noch größere Skalen, tritt wieder ein Verhalten auf, das dem der idealen 3D-Turbulenz ähnelt. Es wird vermutet, dass es sich hier um 2D-Turbulenz handelt. Der Bereich der spektralen Lücke selbst ist vermutlich eine Superposition aus zwei- und dreidimensionaler Turbulenz [LLP16]. Eine Abschätzung für welche Längenskalen 2D- oder 3D-Turbulenz auftritt, wurde kürzlich durch die Berücksichtigung der Wirkung der Erdoberfläche vorgeschlagen [Sim20]. Die Einbeziehung der Erdoberfläche in die Skalenanalyse wird nun erläutert.

Einfluss der Wasseroberfläche

Im Hinblick auf die FINO1-Messstation stellt die Wasseroberfläche im Modell gestörter Wirbel aus der Arbeit [Sim20] eine Grenzfläche dar, welche die Isotropie der Turbulenz einschränkt. Wirbel mit einem Durchmesser kleiner als der Messhöhe z auf Höhe der Messstation sind ungestört. Ist der Wirbeldurchmesser größer als z , können die Wirbel durch die Wasseroberfläche gestört werden, wenn sie auf diese treffen. Wie in [Sim20] diskutiert, lassen sich kleinste und größte gestörte Wirbel definieren, wenn man Wirbel vereinfacht als kreisförmig zirkulierende Winde betrachtet. Eine Störung kann zudem nur auftreten, wenn die Wirbel einen Impuls senkrecht zur Wasseroberfläche haben.

Bei Betrachtung eines Wirbels mit zur Wasseroberfläche paralleler Drehachse kann der kleinste gestörte Wirbel mit dem Durchmesser z definiert werden. Er überdeckt den Bereich von der Wasseroberfläche bis zur Messhöhe z . Über die mittlere höhenabhängige Windgeschwindigkeit $\bar{v}(z)$, die der Windgeschwindigkeit des Wirbels entsprechen soll, kann die Umlaufzeit T_Z beziehungsweise die Frequenz

$$f_{3D}(z) = \frac{1}{T_Z} = \frac{\bar{v}(z)}{\pi z} \quad (4.1.6)$$

bestimmt werden. Mit der für die Messhöhe $z = 100$ m mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}(z = 100 \text{ m}) = 9,15 \text{ m s}^{-1}$ lässt sich die Frequenz f_{3D} berechnen. Es ergibt sich $f_{3D}(100 \text{ m}) \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$. Dies ist die höchste Frequenz für gestörte Wirbel. Der Faktor $1/\pi$ ist heuristisch motiviert, da die Frequenz so den richtigen Übergangsbereich zwischen 3D-Turbulenz und spektraler Lücke trifft und besser zu den Daten passt, wie im Folgenden in Kapitel 4.2 gezeigt wird.

Auf ähnliche Weise können auch die größten gestörten Wirbel bestimmt werden.

Dazu wird die zur Wasseroberfläche senkrechte Wirbelebene gekippt und zugleich der Durchmesser vergrößert, sodass der Wirbel die Grenzfläche noch berührt. Ist die Wirbelebene so weit gekippt, dass sie die Grenzfläche nur noch tangential berührt, so entspricht der Durchmesser des Wirbels der geodätischen Sichtweite $R(z)$,

$$R(z) = \sqrt{2R_E z + z^2} \quad (4.1.7)$$

mit dem Erdradius $R_E = 6371$ km und der Beobachtungs- beziehungsweise Messhöhe z . Der maximale Durchmesser ist dann $R(100\text{ m}) = 35,7$ km. Die Umlaufzeit und Frequenz lassen sich wie bei den kleinsten gestörten Wirbeln [Gl. (4.1.6)] berechnen und lauten

$$f_{2D}(z) = \frac{1}{T_R} = \frac{\bar{v}(z)}{\pi R}. \quad (4.1.8)$$

Mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}(100\text{ m}) = 9,15\text{ m s}^{-1}$ ergibt sich für die größten gestörten Wirbel $f_{2D}(100\text{ m}) \approx 8 \cdot 10^{-5}$ Hz.

Da ausgehend vom Modell in [Sim20] für Frequenzen größer als f_{3D} die Isotropie der Wirbel nicht eingeschränkt ist, können sie durch ideale 3D-Turbulenz mit dem Kolmogorow-Potenzgesetz [Gl. (4.1.1)] beschrieben werden. Dieser Bereich soll deshalb im Folgenden als 3D-Bereich bezeichnet werden. Unterhalb von f_{2D} sind die Wirbel wieder ungestört, da sie hier nur horizontalen Impuls parallel zur Erdoberfläche tragen. Sie können durch die Potenzgesetze von Kraichnan für ideale 2D-Turbulenz beschrieben werden. Dieser Bereich soll im Folgenden als 2D-Bereich bezeichnet werden. Die spektrale Lücke umfasst den Frequenzbereich von f_{3D} bis f_{2D} und stellt einen Übergangsbereich zwischen 2D- und 3D-Turbulenz dar.

Abschließend sind in Tabelle 4.1 die grundlegenden Eigenschaften der verschiedenen Skalenbereiche noch einmal zusammengefasst.

	Spektrum	$D_3(\tau)$	Kaskadenrichtung
3D Energie	$\sim f^{-\frac{5}{3}}$	<0	groß \rightarrow klein
2D Energie	$\sim f^{-\frac{5}{3}}$	>0	klein \rightarrow groß
2D Enstrophie	$\sim f^{-3}$	>0	groß \rightarrow klein

Tabelle 4.1: Eigenschaften der verschiedenen Skalenbereiche und der dritten Strukturfunktion $D_3(\tau)$ nach Gleichung (4.1.9)

Auch im Zeitraum gibt es bekannte Eigenschaften der Skalenbereiche. Deshalb ist in Tabelle 4.1 zusätzlich die dritte Strukturfunktion $D_3(\tau)$ eingetragen, welche für $q = 3$ mit der allgemeinen Gleichung der Strukturfunktion

$$D_q(\tau) = \langle [\Delta_\tau v]^q \rangle_t \quad (4.1.9)$$

berechnet wird. Dabei ist τ eine Zeitdifferenz und $\langle [\Delta_\tau v]^q \rangle_t$ der Mittelwert über alle Zeiten t des q -ten Moments der Geschwindigkeitsinkremente

$$\Delta_\tau v = v(t) - v(t + \tau). \quad (4.1.10)$$

Theoretische Untersuchungen der Navier-Stokes-Gleichungen zeigten, dass $D_3(\tau)$ für 3D-Turbulenz negativ [Kol91a] und für 2D-Turbulenz im Allgemeinen positiv ist [Lin99; CC17; XB18]. Es ist demnach ein Vorzeichenwechsel für $D_3(\tau)$ am Übergang zur 2D-Turbulenz um $1/f_{2D}$ zu erwarten. In den folgenden Analysen sollen die Erkenntnisse aus der Theorie anhand der FINO1-Daten überprüft und dargestellt werden.

4.2 Analysemethoden und -ergebnisse

In einem ersten Schritt wird die PDF von v und ihre zeitliche Entwicklung betrachtet. Zu Beginn wird die PDF eines Monats und anschließend die weiteren PDF des jeweils um einen Monat erweiterten Datensatzes bestimmt, bis die gesamte Datensatzlänge von 20 Monaten voll ausgeschöpft ist. In Abbildung 4.1 sind die Ergebnisse dieser Auswertung dargestellt.

Bis zu einer Länge von elf Monaten können mehrere Maxima in Abbildung 4.1 beobachtet werden. Die Maxima sind besonders für Datensätze zu erkennen, die wenige Monate umfassen. Solch eine Verteilung mit mehreren Maxima wird auch als multimodale Wahrscheinlichkeitsdichte (mPDF) bezeichnet. Je länger der betrachtete Datensatz wird, desto stärker flachen die Maxima ab und es ist ab elf Monaten nur noch ein einzelnes gemeinsames Maximum zu erkennen.

In der Literatur wird die PDF der Windgeschwindigkeiten häufig durch eine Weibull-Wahrscheinlichkeitsdichte $p_W(v)$ beschrieben [Gry+15]. Sie wird durch

$$p_W(v) = \begin{cases} \frac{K}{\lambda} \left(\frac{v}{K}\right)^{K-1} \exp(-(v/\lambda)^K) & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

mit $K > 0$ definiert. Es handelt sich bei K um einen Form- und bei $1/\lambda > 0$ um einen Skalenparameter der Verteilung.

Die Parameter werden entsprechend der vorliegenden Windgeschwindigkeitsverteilung mithilfe einer Maximum-Likelihood-Schätzung durch das Python-Package SciPy angepasst. Es ergeben sich $K = 1,96$ und $\lambda = 10,31$ für die beiden Parameter. In Abbildung 4.2 sind die PDF und die angepasste Weibull-Verteilung zu sehen. Im Rahmen von kleineren Abweichungen beschreibt die Weibull-Verteilung die vorliegende PDF der Windgeschwindigkeiten gut auf großen Zeitskalen.

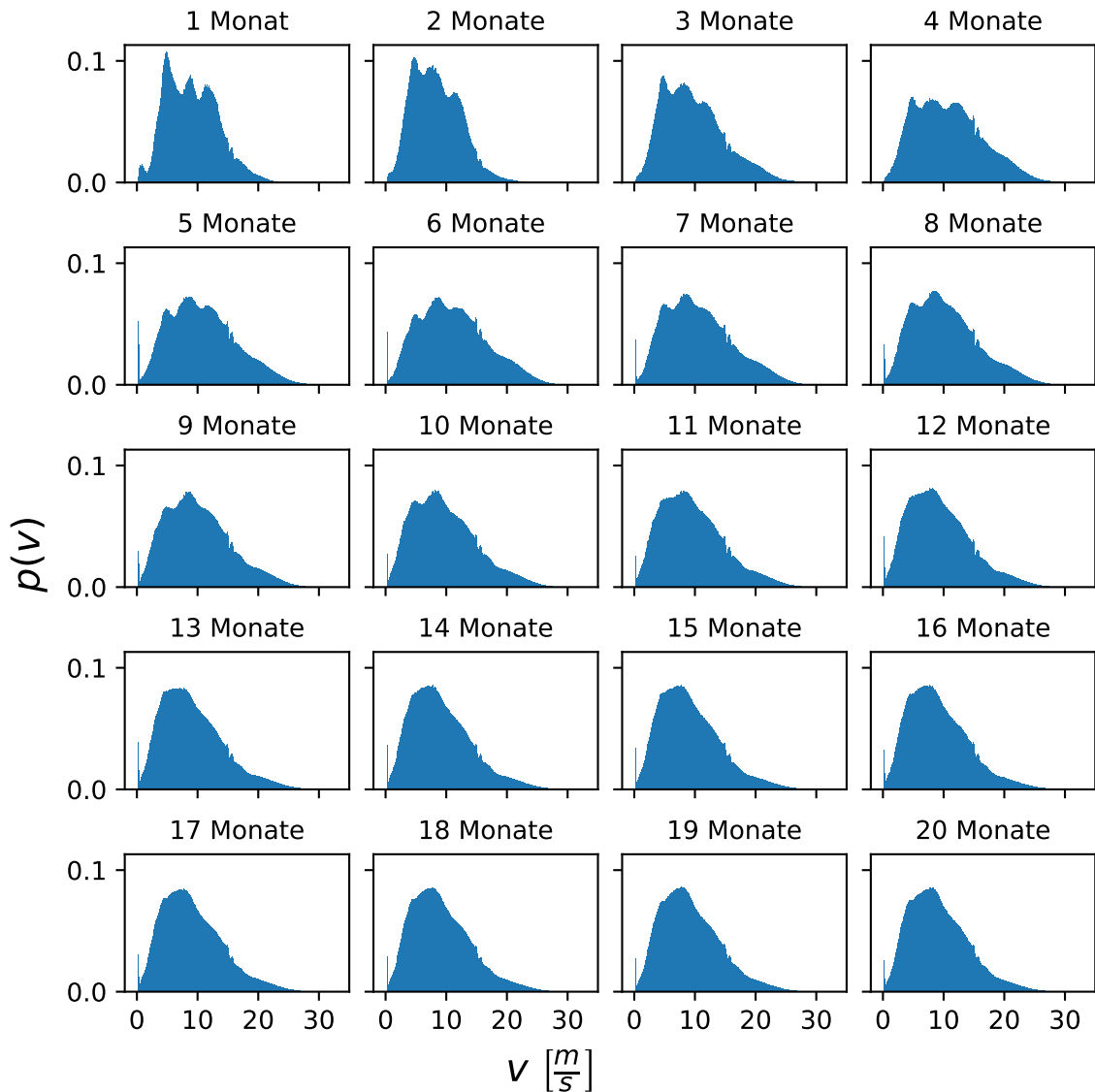


Abbildung 4.1: Zeitentwicklung der Windgeschwindigkeit-PDF bei monatsweiser Verlängerung des Datensatzes bis hin zu 20 Monaten.

Spektrum

Eine weitere Untersuchungsmethode stellt die Betrachtung und Analyse des Spektrums der FINO1-Daten dar.

Wie bereits in Kapitel 2.7 beschrieben ist es nur mit erhöhtem Aufwand möglich, das Spektrum von Daten zu bestimmen, wenn Lücken mit mehr als einem NaN auftreten. Es werden deshalb die gefundenen Abschnitte, die nur einzelne, nicht aufeinanderfolgende NaN enthalten, gewählt und das jeweilige Spektrum mit Gleichung (2.5.1) berechnet. Die einzelnen NaN wurden durch das arithmetische Mittel mithilfe der benachbarten Datenpunkte interpoliert. Anschließend werden die Einzelspektren durch auf logarithmischer Skala äquidistante Bins gemittelt. Darauf folgend wird die Mittelung aller Einzelspektren mit Gleichung (3.3.1) wie in Kapitel 3.3 angewendet. Das daraus resultierende Summenspektrum ist in Abbildung 4.3

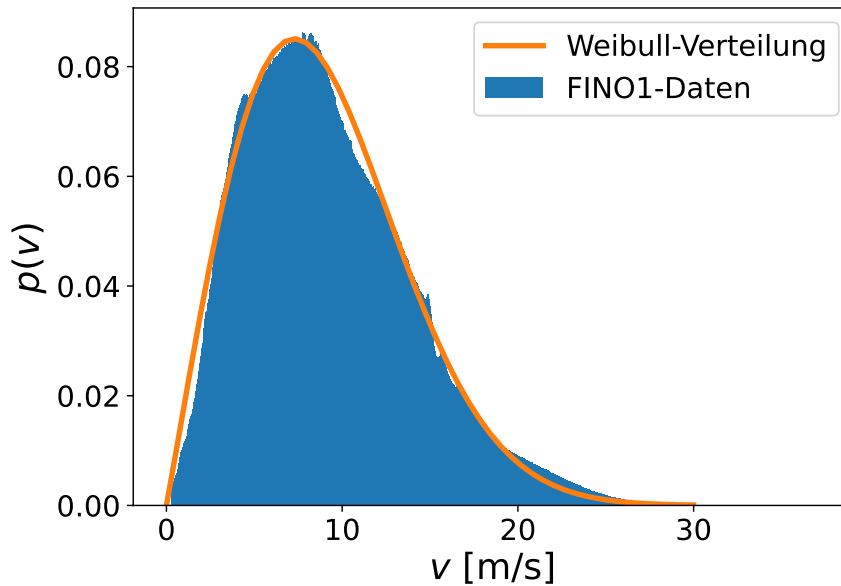


Abbildung 4.2: PDF der Windgeschwindigkeiten im Vergleich mit einer angepassten Weibull-PDF.

doppellogarithmisch gegen die Frequenz aufgetragen.

Bei Betrachtung des Spektrums im Logarithmischen lassen sich Frequenzbereiche mit verschiedenen nahezu linearen Steigungen erkennen. Die Frequenzbereiche wurden mithilfe der Turbulenztheorie bereits näher klassifiziert [Sim20]. Zum Vergleich sind in Abbildung 4.3 Geraden mit den nach der Turbulenztheorie erwarteten Steigungen eingezeichnet. Ebenso sind die Frequenzen für die kleinsten und größten gestörten Wirbel eingezeichnet. Im 3D-Bereich $f > 3 \cdot 10^{-2} \text{ Hz} = f_{3D}$, tritt wie erwartet eine fast konstante Steigung von $-5/3$ auf. Für größere Wirbel gibt es im Bereich der spektralen Lücke $8 \cdot 10^{-5} \text{ Hz} < f < 3 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$ erst eine flachere Steigung von etwa -1 und anschließend wieder einen steileren Anstieg in Richtung kleinerer Frequenzen. Die Existenz einer spektralen Lücke gilt als gefestigt [Lar+19]. Ihre Ursache wird in der Literatur weiterhin diskutiert, da sie noch nicht eindeutig geklärt ist. Frequenzen mit $f < 8 \cdot 10^{-5} \text{ Hz} = f_{2D}$ fallen in den 2D-Bereich. Hier lassen sich zwei unterschiedliche Steigungen ausmachen. Nach dem Übergang aus dem Bereich der spektralen Lücke in den 2D-Bereich wird das Spektrum erneut steiler und zeigt in einem kleineren Frequenzintervall auch näherungsweise die erwartete Steigung von -3 , um danach in einen Bereich mit einer Steigung von $-5/3$ überzugehen.

Die Beobachtungen spiegeln die durch die Theorien für ideale drei- und zweidimensionale Turbulenz entwickelten Potenzgesetze und das Auftreten dieser in den durch das Modell gestörter Wirbel vorhergesagten Bereichen wider. Im 3D-Bereich in Abbildung 4.3 ist das Gesetz von Kolmogorow aus Gleichung (4.1.1) erkennbar und im 2D-Bereich sind die Gesetze von Kraichnan aus Gleichung (4.1.5) und (4.1.4) näherungsweise anwendbar. Die Potenzgesetze für zweidimensionale Turbulenz sind jedoch nicht besonders deutlich in Abbildung 4.3 zu erkennen. Für eine umfassendere

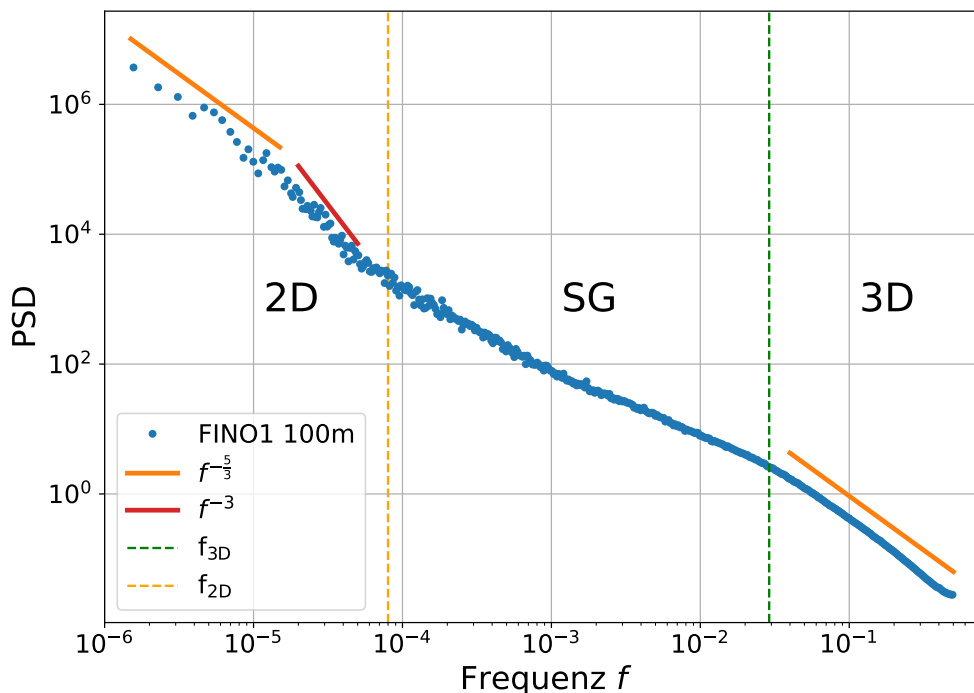


Abbildung 4.3: Summenspektrum der Windgeschwindigkeiten mit eingezeichneten Geraden, deren Steigungen von der Turbulenztheorie vorhergesagt werden. Die gestrichelten Linien markieren die Frequenzen aus dem Modell für gestörte Wirbel.

Darstellung, siehe [SPM22].

Inkremente

Zur Analyse im Zeitraum bietet es sich an, die Geschwindigkeitsinkremente [Gl. (4.1.10)] zu betrachten. Die Inkremente stellen die Windgeschwindigkeitsdifferenz nach einer Zeitdifferenz τ dar. Überschreitet ein Inkrement einen Schwellenwert, so kann von einer Windböe gesprochen werden. Motiviert ist die Analyse der Geschwindigkeitsinkremente neben der Analyse von $D_3(\tau)$ durch eine über die verschiedenen Skalenbereiche variierende Energietransferrate, wie sie in [Sim20] festgestellt wurde. Die von $\beta = 5/3$ abweichenden Exponenten im Bereich der spektralen Lücke und der 2D-Turbulenz sind ebenso Indikatoren dafür und stehen vermutlich mit Intermittenz in Verbindung. Die Intermittenz beschreibt hier das Auftreten von kurzen irregulären, chaotischen Abschnitten innerhalb von langen Zeiträumen, die das ansonsten reguläre Verhalten des Windes unterbrechen. Ein Abweichen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von der Normalverteilung kann ein Hinweis auf Intermittenz sein. Gleichzeitig ist dies eine notwendige Bedingung für ihr Auftreten. Es sollten im Falle der Intermittenz Extremwerte in $\Delta_1 v$ häufiger als bei einer Gaußverteilung auftreten. Ist die Energietransferrate dagegen konstant, dann sind die Inkremente normalverteilt [Nae+98].

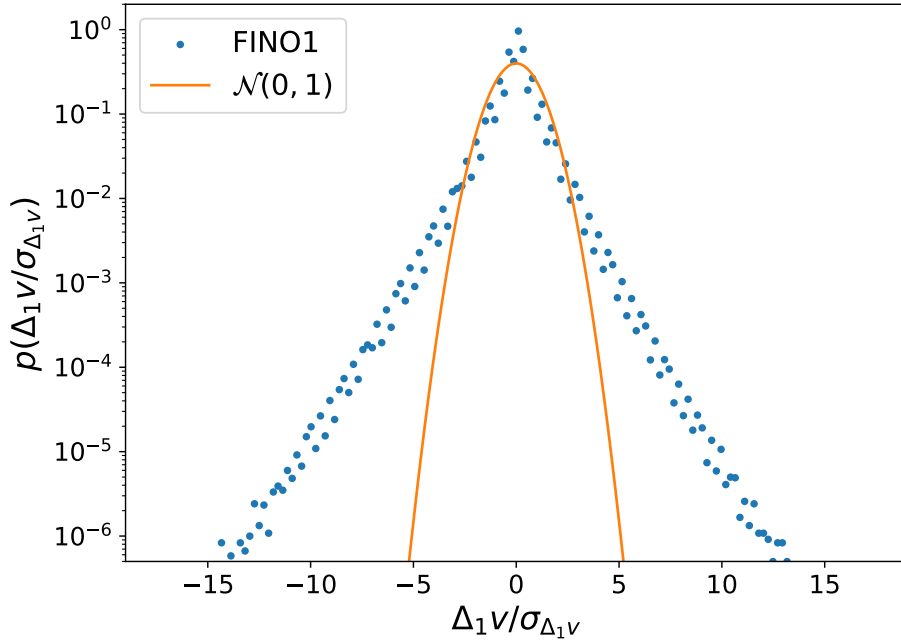


Abbildung 4.4: PDF der skalierten Geschwindigkeitsinkremente für $\tau = 1\text{s}$

In Abbildung 4.4 ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Geschwindigkeitsinkremente mit $\tau = 1\text{s}$ dargestellt. Um die PDF mit einer Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ vergleichen zu können wurde sie mit der Standardabweichung $\sigma_{\Delta_1 v}$ normiert. Die PDF der Inkremente ist leptokurtisch und zeigt zudem eine um mehrere Größenordnungen höhere Wahrscheinlichkeit für Extremwerte als die Normalverteilung. Diese Extremwerte werden sehr wahrscheinlich durch Windböen verursacht. Die Form einer solchen Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch als ‘‘Fat-tailed-Verteilung,’’ bezeichnet [Boe+03].

Durch genaue Beobachtung kann man feststellen, dass Extremwerte $\Delta_1 v < 0$ häufiger als Extremwerte $\Delta_1 v > 0$ auftreten. Dies lässt sich durch die Schiefe

$$\chi(\tau) = \left\langle \left(\frac{\Delta_\tau v - \langle \Delta_\tau v \rangle}{\sigma_{\Delta_\tau v}} \right)^3 \right\rangle_t = \frac{D_3(\tau)}{D_2^{3/2}(\tau)} \quad (4.2.2)$$

quantifizieren. Sie beträgt $\chi(\tau = 1\text{s}) = -0,25$ und bestätigt damit die Beobachtung, dass mehr Extremwertereignisse in $\Delta_1 v < 0$ als in $\Delta_1 v > 0$ auftreten.

Um auch das erhöhte Auftreten der Extremwerte zu quantifizieren, kann die Kurtosis

$$\kappa(\tau) = \left\langle \left(\frac{\Delta_\tau v - \langle \Delta_\tau v \rangle}{\sigma_{\Delta_\tau v}} \right)^4 \right\rangle_t = \frac{D_4(\tau)}{[D_2(\tau)]^2} \quad (4.2.3)$$

der PDF berechnet werden. Sie beträgt $\kappa(\tau = 1\text{s}) = 18,9$ und ist deutlich größer als die einer Normalverteilung mit $\kappa = 3$. Eine Kurtosis $\kappa > 3$ bedeutet ein erhöhtes Auftreten von Extremwerten im Vergleich zu einer Normalverteilung. Gegenteiliges gilt für $\kappa < 3$.

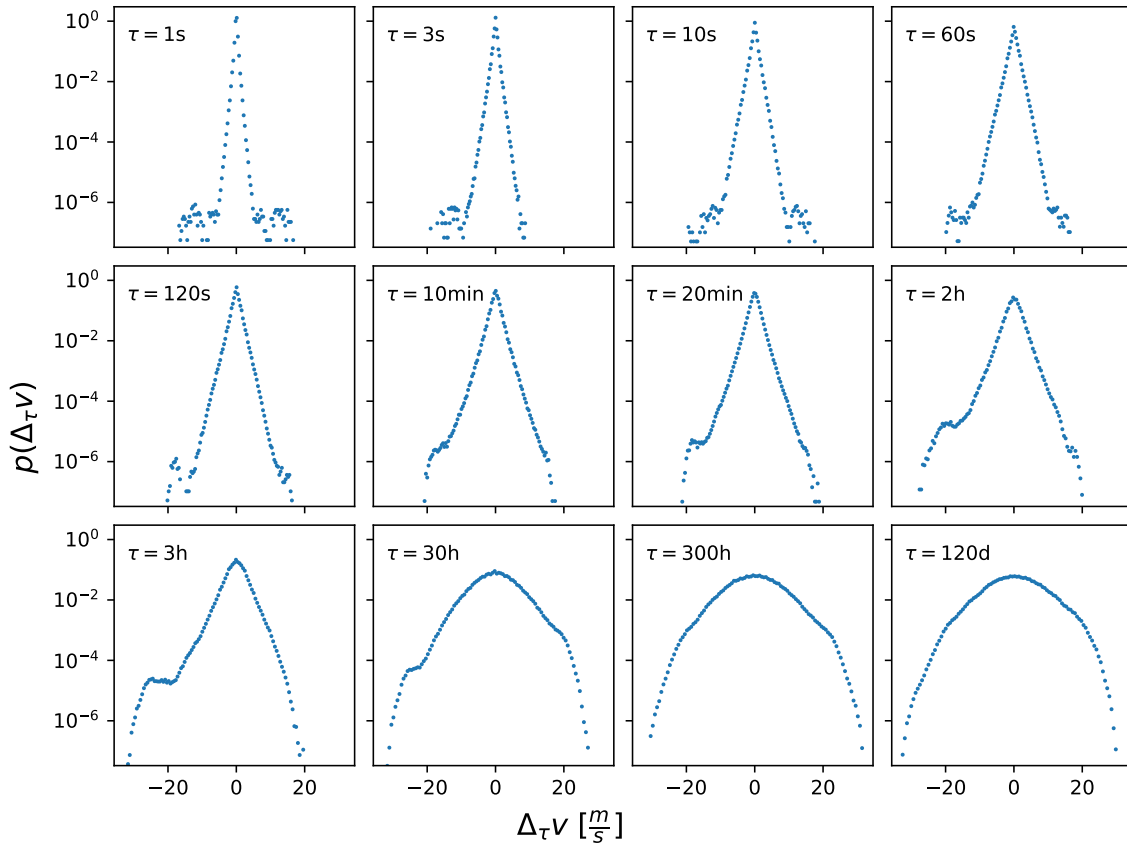


Abbildung 4.5: Geschwindigkeitsinkrementverteilung der FINO1-Daten für verschiedene τ .

In Abbildung 4.5 sind die PDF für verschiedene Geschwindigkeitsinkremente dargestellt. Klar zu erkennen ist die Veränderung von $p(\Delta_\tau v)$ durch Erhöhung von τ . Es zeigt sich für Werte von τ im niedrigen Sekundenbereich eine spitze, schmale PDF, die für größere τ zunehmend breiter wird, abflacht und die Form einer Gaußverteilung annimmt. Eine negative Schiefe der PDF ist besonders gut für $\tau = 3\text{h}$ zu sehen. Es bildet sich hier linksseitig eine Art Plateau in der PDF. Bei genauer Betrachtung ist erkennbar, dass die Schiefe von $\tau = 1\text{s}$ bis $\tau = 3\text{h}$ negativ ist und sich für $\tau > 3\text{h}$ sogar zum Positiven entwickelt.

Die für $\tau = 1\text{s}$ besprochene, gegenüber einer Normalverteilung erhöhte Kurtosis, ist auch für größere τ weiterhin erhöht. Sie nimmt für noch größere τ ab und die PDF wird zunehmend gaußförmig.

$D_3(\tau)$ und Kurtosis

Statt der Schiefe χ wird das 3-te Moment $D_3(\tau)$ der Strukturfunktionen [Gl. (4.1.9)] neben der Kurtosis $\kappa(\tau)$ untersucht. Die Schiefe eignet sich zwar besser zur intuitiven Einschätzung der Form der Verteilung der Inkremente, jedoch gibt es, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, Erkenntnisse aus der theoretischen Untersuchung der Navier-Stokes-Gleichungen für $D_3(\tau)$, auf welche hin die Daten untersucht werden können.

In Abbildung 4.6 sind in (a) $D_3(\tau)$ und in (b) die Kurtosis $\kappa(\tau)$ gegen τ aufgetragen.

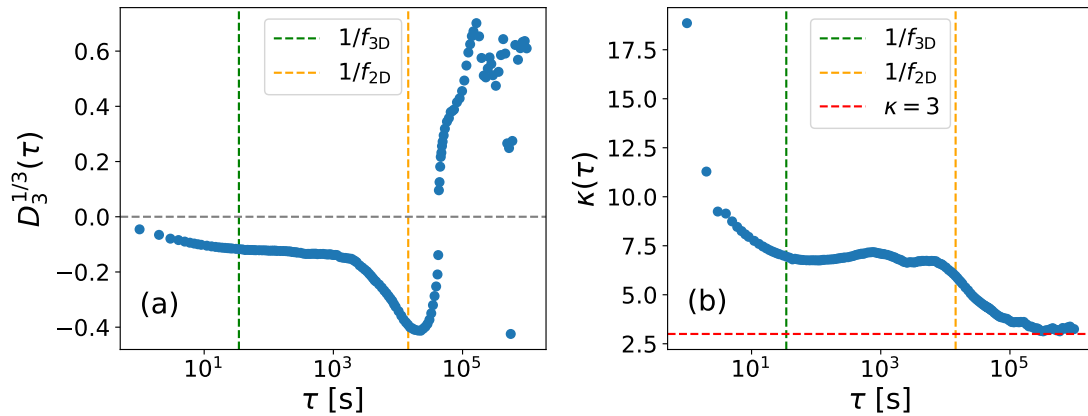


Abbildung 4.6: $D_3(\tau)$ und Kurtosis $\kappa(\tau)$ für ansteigende τ mit eingezeichneten charakteristischen Frequenzen (gestrichelte vertikale Linien) nach Gleichung (4.1.6) und (4.1.8)

Die dritte Strukturfunktion $D_3(\tau)$ wird, um Änderungen besser zu verdeutlichen, als $D_3^{1/3}(\tau)$ dargestellt. Sie liegt zunächst im negativen Bereich und fällt für größere τ weiter ins Negative. Ab etwa $\tau = 2 \cdot 10^3$ s fällt die Kurve steiler ab, um kurz nach $\tau = 1/f_{2D}$ ihr Minimum zu erreichen. Für $\tau > 1/f_{2D}$ wächst $D_3(\tau)$ steil an und geht ins Positive über. Sie bleibt für noch größere τ zunächst weiter positiv, fluktuiert dann aber stärker und zeigt keinen durchgängigen Verlauf mehr. Die Beobachtungen für $D_3(\tau)$ stimmen mit den theoretischen Erkenntnissen aus den Navier-Stokes-Gleichungen, siehe Tabelle 4.1, überein. Für $\tau < 1/f_{2D}$ ist $D_3(\tau)$ durchgehend negativ, was den Skalenbereich der 3D-Turbulenz überdeckt. Für $\tau > 1/f_{2D}$ ist $D_3(\tau)$ dagegen positiv, was wiederum den Skalenbereich der 2D-Turbulenz überdeckt. Der zu erwartende Vorzeichenwechsel von $D_3(\tau)$ ist im Bereich der Übergangsfrequenz $1/f_{2D}$ deutlich zu erkennen. Die dritte Strukturfunktion verhält sich in den durch das Modell für gestörte Wirbel vorhergesagten Bereichen für 2D- und 3D-Turbulenz so, wie es aus theoretischen Vorhersagen auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen vorhergesagt wird.

Der Übergang von der 3D-Turbulenz zur spektralen Lücke ab $\tau = 1/f_{3D}$ zeigt keine signifikante Änderung für $D_3(\tau)$. Die Kurtosis κ dagegen fällt für ansteigende τ bis zu diesem Bereich stark ab. Anschließend bildet sich eine Art Plateau aus. Für größere τ in der Umgebung von $1/f_{2D}$ fällt die Kurtosis erneut weiter ab, bis sie ab $\tau = 4 \cdot 10^5$ s etwa $\kappa = 3$ erreicht und sich nicht mehr verändert. Die Inkrementverteilung wird dann gaußförmig, wie auch bereits in Abbildung 4.5 zu erkennen war. Die Werte der Kurtosis für $\tau = 1$ s und $\tau = 2$ s weichen etwas von dem weiteren Verlauf der Datenpunkte ab, was auf einen Präzisionsverlust des Schalenanemometers für kurze Zeitdifferenzen zurückzuführen ist. Durch den Wind greift an dem Schalenanemometer ein Drehmoment an, wodurch es in Bewegung gesetzt wird. Die aktuelle Windgeschwindigkeit stellt sich bei dem Schalenanemometer aber aufgrund der Trägheit des Schalenanemometers nur verzögert ein. Aus dieser Verzögerung resultiert der Präzisionsverlust für kleine τ .

Kapitel 5

Windsimulation

In diesem Kapitel soll untersucht werden, inwieweit Eigenschaften des Windes mittels eines Windmodells von Kamps und Schmietendorf [SPK17] (KS-Modell) beschrieben werden können. Das Modell basiert auf Erkenntnissen, die aus einigen bekannten Eigenschaften des Windes gewonnen werden konnten. Wie bereits im vorherigen Kapitel gezeigt und auch allgemein aus der Literatur bekannt, weist der Wind folgende Eigenschaften auf: (1) eine weibullähnliche Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Geschwindigkeit v , (2) eine nichtgaußische, intermittente Inkrementstatistik, sowie (3) ein Spektrum, das zum Teil durch die Turbulenztheorie für zweidimensionale und dreidimensionale Turbulenz beschrieben werden kann. Für dieses Modell wird zunächst für den Wind ein vereinfachtes Spektrum mit $S(f) \sim f^{-\frac{5}{3}}$ angenommen, welches im Folgenden als „5/3-Spektrum“ bezeichnet wird. Anschließend wird das Spektrum der FINO1-Daten für das Modell verwendet.

5.1 Windmodell nach Kamps und Schmietendorf

Das Kamps-Schmietendorf-Modell setzt sich aus zwei Differentialgleichungen (DGL) zusammen. Mit dem Modell kann intermittentes Verhalten für die Zeitreihe erzeugt werden. Bei dem ersten System handelt es sich um einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OUP, siehe Kapitel 3)

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \Gamma(t) \quad (5.1.1)$$

mit einem Gaußschen weißen Rauschen $\Gamma(t)$ und der Potentialstärke γ . Die Amplitude des Gaußschen weißen Rauschens wird durch $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \sigma_\Gamma \delta(t-t')$ festgelegt und kann damit über σ_Γ verändert werden. Die zweite DGL

$$\dot{v}(t) = \underbrace{gv(t) \left(1 - \frac{v(t)}{v_0}\right)}_{\text{deterministischer Term}} + \underbrace{\sqrt{Dv(t)^2} y(t)}_{\text{Rauschterm}} \quad (5.1.2)$$

setzt sich aus einem deterministischen und einem stochastischen Term zusammen. Der stochastische Term wird hier mit dem Begriff „Rauschterm“ abgekürzt. Der Rauschterm bezieht den OUP aus Gleichung (5.1.1) mit ein. Wenn der Rauschterm $\sqrt{Dv^2}y$ mit $y(t) = 0$ zunächst außen vor gelassen und somit nur der deterministische Term $\dot{v} = gv(1 - v/v_0) = f(v)$ betrachtet wird, so verhält sich die Lösung der DGL (5.1.2) wie eine logistische Funktion. Logistische Funktionen zeichnen sich durch einen sigmoiden Verlauf (Sigmoidfunktion) aus. Sie stellen eine derartig modifizierte Form des exponentiellen Wachstums dar, dass mit ihrem Wachstum eine „Ressource“ verbraucht wird, die dann zur Konvergenz gegen eine obere Schranke führt. Diese Art von Funktionen finden häufig in der Beschreibung von biologischen Populationen ihre Anwendung.

In Hinblick auf logistische Funktionen für Populationen entspricht g einer relativen Wachstumsrate mit der SI-Einheit ms^{-2} , v ist die aktuelle Populationsgröße. Die Ableitung \dot{v} entspricht dem Wachstum der Population. Der letzte noch nicht benannte Parameter ist v_0 . Es handelt sich in Bezug auf Populationen um die Tragfähigkeit eines ökologischen Systems. Mit anderen Worten wird die Populationsgröße hierdurch begrenzt, da ein von außen induziertes oder durch Fluktuationen ausgelöstes Übersteigen der Populationsgrenze v_0 immer zur Folge hat, dass die Population zurück zu v_0 fällt.

Es handelt sich bei $v_1^* = v_0$ um einen sogenannten stabilen Fixpunkt der Gleichung. Für Fixpunkte im Allgemeinen gilt $\dot{v}(v^*) = 0$. Man spricht von einem stabilen Fixpunkt, wenn eine kleine Störung von dem Fixpunkt aus mit der Zeit gedämpft wird. Die Lösung verläuft also mit der Zeit zurück zum Fixpunkt. Für stabile Fixpunkte gilt $df(v^*)/dv < 0$. Es existiert ein weiterer instabiler Fixpunkt für $v_2^* = 0$. Für einen instabilen Fixpunkt wächst eine Störung an, die Lösung der DGL (5.1.2) entfernt sich mit der Zeit also immer weiter von dem Fixpunkt. Für instabile Fixpunkte gilt $df(v^*)/dv > 0$.

Die Bedeutung der Parameter ist in folgender Weise auf den Wind übertragbar. Die Populationsgröße v entspricht der Windgeschwindigkeit, g ist weiterhin eine relative Wachstumsrate und $\dot{v}(t)$ die Änderung der Windgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t . Der Parameter v_0 ist eine obere Grenze für die Windgeschwindigkeit, die durchaus überschritten werden kann.

Für $y(t) \neq 0$ weicht das Verhalten der Zeitreihe von demjenigen für die rein deterministische Gleichung ab. Der logistische Verlauf ist für viele Parameter als solcher nicht mehr erkennbar und wird durch das stochastische Verhalten des OUP im Rauschterm gestört.

Für die konkrete Umsetzung des Windmodells wird nach der Simulation von Gleichung (5.1.2) noch zusätzlich eine spektrale Anpassung der Zeitreihe durchgeführt. Vereinfacht beschrieben wird zunächst das 5/3-Spektrum von Kolmogorow für den gesamten Frequenzbereich angenommen. Dies entspricht dem Spektrum für ideale 3D-Turbulenz und repräsentiert damit zumindest auf den in Kapitel 4.2 beschriebenen Skalen das spektrale Verhalten der Windgeschwindigkeitskorrelationen. Des Weiteren wird der Prozess auch durch das reale Spektrum der FINO1-Daten statt des 5/3-Spektrums modifiziert.

Technische Umsetzung

Um den zunächst gewünschten Verlauf mit $f^{-\frac{5}{3}}$ im Spektrum zu erhalten, wird durch Anwenden des zuvor beschriebenen Euler-Maruyama-Verfahrens in Kapitel 3.2 eine Iterationsvorschrift für Gleichung (5.1.2) bestimmt. Es werden Werte für die Parameter $g, \gamma, v_0, \sigma_T, dt$ und D gewählt und damit die Zeitreihe $v(t)$ generiert. Für diese Zeitreihe $v(t)$ wird die Fouriertransformierte $\hat{v}(f)$ berechnet. Die Fourieramplituden werden jeweils durch ihren Betrag normiert und mit $(f^{-\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}$ multipliziert

$$\hat{V}(f) = \frac{\hat{v}(f)}{|\hat{v}(f)|} \left(f^{-\frac{5}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sie werden mit der Quadratwurzel des Terms multipliziert, da das Spektrum (2.5.1) mit der quadrierten Fouriertransformierten $|\hat{v}(f)|^2$ berechnet wird. Anschließend findet die Rücktransformation von $\hat{V}(f)$ in den Zeitraum statt. Die resultierende Zeitreihe weist so das gewünschte 5/3-Spektrum auf.

Um die Anpassung mit dem realen FINO1-Spektrum durchzuführen, sind weitere Zwischenschritte notwendig. Als erster Schritt wird das in Kapitel 4.2 bestimmte Summenspektrum als Datensatz mit den Frequenzen und den zugehörigen Amplituden gespeichert. Es handelt sich um einzelne Datenpunkte und keine kontinuierliche Funktion, weshalb die Frequenzen und ihre zugehörigen Amplituden interpoliert werden. Des Weiteren muss aufgrund der unterschiedlichen Auflösung der Datenpunkte von Simulation und FINO1-Daten das Spektrum um hohe Frequenzen erweitert werden. Dazu wird das Potenzgesetz $S(f) \sim f^{-\frac{5}{3}}$ für die benötigten Frequenzen so an den Datensatz angehängt, dass ein möglichst glatter Übergang zum zuvor bestimmten Spektrum entsteht. Dieser erweiterte Verlauf setzt die Annahme voraus, dass sich das Spektrum im 3D-Bereich für höhere Frequenzen weiterhin nach dem Potenzgesetz von Kolmogorow entwickelt. Das weitere Vorgehen für die Zeitreihe entspricht dem zuvor beschriebenen.

Durch die spektrale Anpassung verändern sich die statistischen Eigenschaften der Zeitreihe erneut, was es erschwert, genaue Aussagen zur Bedeutung der Parameter zu treffen. Da ein Teil der Eigenschaften aber auch nach der spektralen Anpassung erhalten bleiben, ist es sinnvoll, die Ausgangsgleichung erst ohne die spektrale Anpassung zu untersuchen.

5.2 Abschätzung der Parameter

Für eine Einordnung der Parameter und ihre Auswirkungen auf die Zeitreihe vor der spektralen Anpassung, kann Gleichung 5.1.2 für drei verschiedene Fälle betrachtet werden. Als erster Fall (a) wird die Parameterkombination bezeichnet, für die der deterministische Teil größer als der stochastische Teil ist. Für den zweiten Fall (b) ist der deterministische Teil kleiner als der stochastische Teil der Gleichung. Der dritte Fall (c) ist der Grenzfall, für den sich der deterministische und der stochastische Teil in gleicher Größenordnung befinden. Aus Gleichung 5.1.2 kann man solch einen Grenzfall durch

$$\left| gv \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) \right| \sim \left| \sqrt{D} v y \right|$$

abschätzen. Mit der Abschätzung $y \sim \sigma_\Gamma / \sqrt{2\gamma}$ als Standardabweichung für den OUP folgt

$$\left| g \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) \right| \sim \left| \sqrt{\frac{D}{2\gamma}} \sigma_\Gamma \right|.$$

Es ist mithilfe von Simulationen von Gl. (5.1.2) heuristisch festzustellen, dass sich v in der Größenordnung von v_0 befindet. Mit der Abschätzung $v = v_0/2$ und weiterer Umformungen kann

$$|g| \gg \left| \sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \sigma_\Gamma \right| \quad (5.2.1a)$$

$$|g| \ll \left| \sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \sigma_\Gamma \right| \quad (5.2.1b)$$

$$|g| \sim \left| \sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \sigma_\Gamma \right| \quad (5.2.1c)$$

für die drei verschiedenen Fälle (a), (b), (c) gefolgert werden. Gleichung (5.2.1c) beschreibt den Grenzfall.

Durch diesen Zusammenhang lassen sich nun Aussagen treffen, für welche Parameterkombinationen der stochastische (5.2.1b) oder der deterministische (5.2.1a) Teil der Gleichung dominiert beziehungsweise für welche sie sich in ähnlicher Größenordnung befinden (5.2.1c). Dies vereinfacht die Analyse der Ergebnisse für verschiedene Parameter und erleichtert die Optimierung dieser.

5.3 Parameterwahl und Optimierung

Eine erste Einschätzung der Wirkung der Parameter lässt sich durch die einfache Darstellung verschiedener Realisierungen erreichen. Interessant ist die Betrachtung der Zeitreihe vor $[\tilde{v}(t)]$ und nach der spektralen Anpassung $[v(t)]$.

Durch v_0 wird vor der spektralen Anpassung der Mittelwert der Zeitreihe verändert, da dieser sich mit leichten Abweichungen in der Größenordnung von v_0 befindet. Die Größenordnung des Parameters v_0 verliert durch das Anpassen des Spektrums aber seine Bedeutung, da die Zeitreihe nach der Anpassung einen Mittelwert von $\langle v \rangle = 0$ aufweist und sich nahezu durchweg in dem Intervall $v \in [-1,1]$ bewegt. Der Parameter v_0 übt weiterhin keinen Einfluss auf die Statistik der Zeitreihe aus. Er

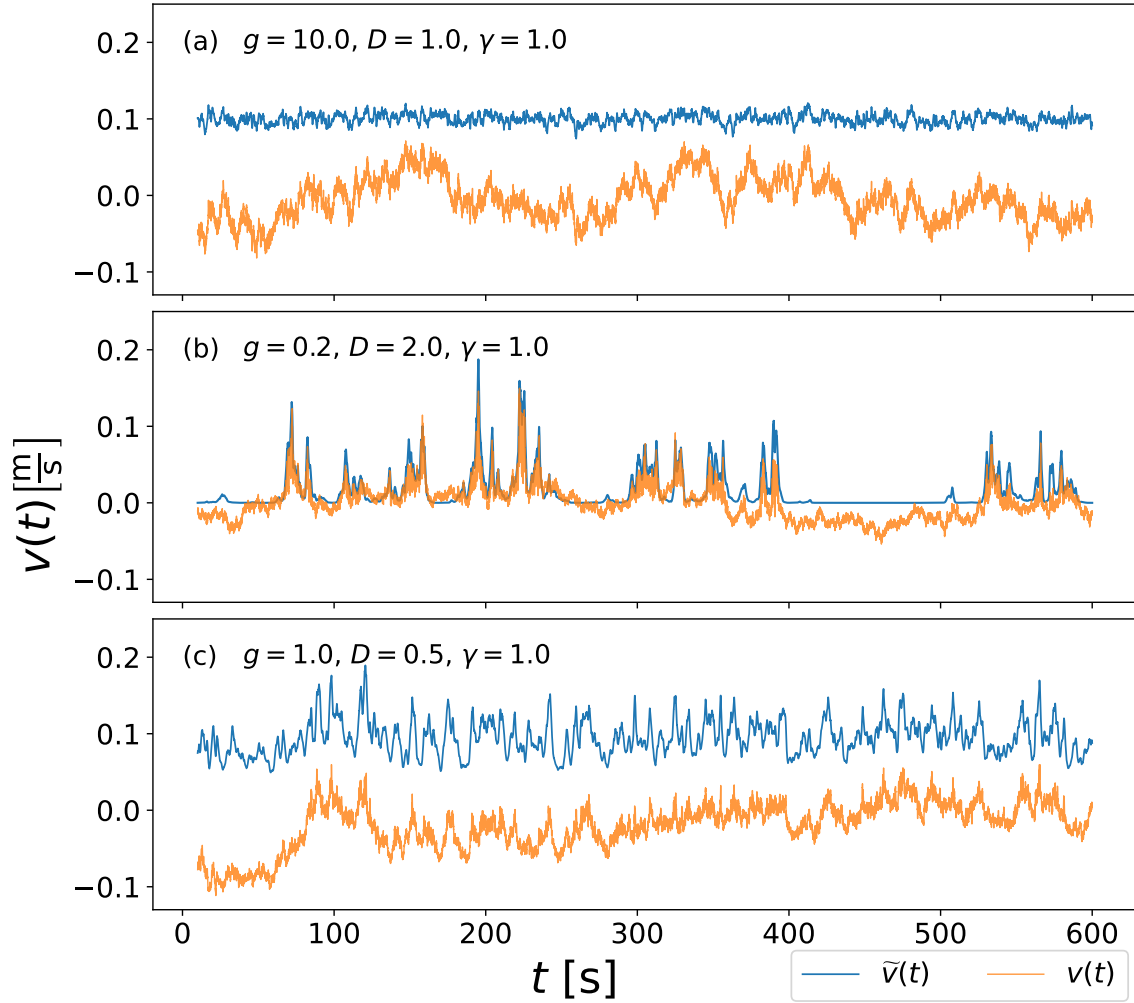


Abbildung 5.1: Realisierungen der drei Fälle (5.2.1a), (5.2.1b), (5.2.1c). Die Zeitreihen vor der spektralen Anpassung mit dem FINO1-Spektrum entsprechen $\tilde{v}(t)$ (blau markierte Realisierungen), die danach $v(t)$ (orange markierte Realisierungen). In (a) und (c) ist $\tilde{v}(t)$ jeweils mit dem Faktor 0,2 und in (b) mit dem Faktor 0,03 skaliert.

wird für alle weiteren Simulationen auf $v_0 = 0,5$ festgelegt.

Der Parameter D hat bei näherer Betrachtung eine äquivalente Bedeutung wie die Wurzel der Standardabweichung σ_Γ des Gaußschen weißen Rauschens des OUP, da hierüber auch der Prozess in seiner Standardabweichung skaliert wird. Im Folgenden wird deshalb $\sigma_\Gamma = 1$ konstant gehalten und nur D als Parameter verändert.

Der Zeitschritt wird für alle Simulationen auf $dt = 0,01$ festgelegt. Für den Vergleich mit den realen Winddaten entsprechen 100 Simulationsschritte einer Sekunde. Diese Zeitskala wurde gewählt, da sie am besten zu den FINO1-Daten passt und Trajektorien generiert, die den FINO1-Daten ähnlich sind. Der Zeitschritt ist für die meisten Parameterkombinationen und Laufzeiten ausreichend groß. Gewisse

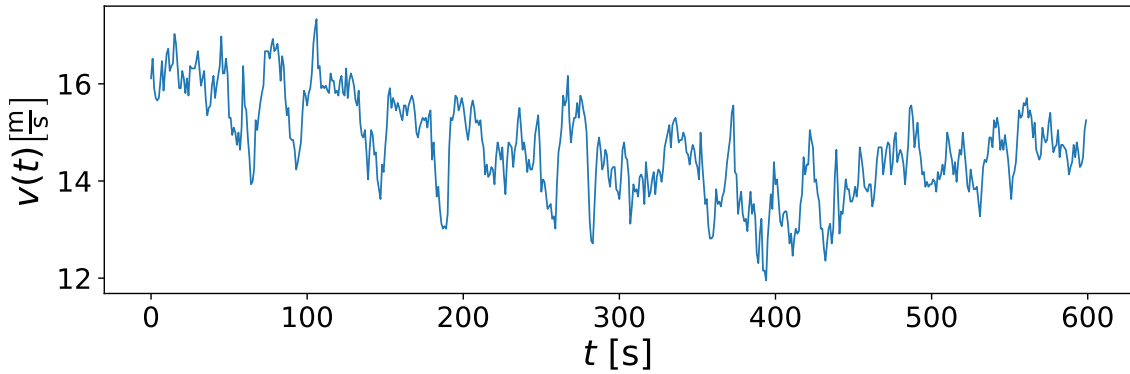


Abbildung 5.2: 600-Sekunden-Ausschnitt der FINO1-Daten.

Parameterkombinationen führen jedoch zu Problemen. Die Ursache dafür ist der instabile Fixpunkt $v_2^* = 0$. Kommt es zu einer Unterschreitung des Punktes, das heißt liegt $x < 0$ vor, kann es für einen parameterspezifischen kritischen Wert dazu kommen, dass die Zeitreihe gegen $-\infty$ divergiert. Dies hat zur Folge, dass die simulierte Zeitreihe unbrauchbar wird. Eine temporäre Abhilfe schafft eine Verkleinerung des Zeitschrittes oder eine Anpassung der Parameter. Beides verringert aber nur die Wahrscheinlichkeit, dass das Problem auftritt. Hinreichend lösen lässt sich das Problem dagegen nur durch eine Anpassung des Modells, so dass ein zweiter stabiler Fixpunkt existiert, der die auftretende Divergenz unterbindet. Soll das Modell unverändert bleiben, kann die Implementation eines adaptiven Zeitschrittes eine sinnvolle Maßnahme sein.

In Abbildung 5.1 sind drei Realisierungen (a), (b), (c) des Windmodells für die jeweiligen im vorherigen Kapitel beschriebenen Fälle von Parametern jeweils vor $\tilde{v}(t)$ und nach $v(t)$ der Anpassung dargestellt. Damit beide in einem Plot erkennbar sind, wurde $\tilde{v}(t)$ jeweils skaliert. In (a) und (c) ist $\tilde{v}(t)$ jeweils mit dem Faktor 0,2 und in (b) mit dem Faktor 0,03 skaliert. In den einzelnen Realisierungen sieht man die Auswirkungen der Parameter auf die Zeitreihe.

Die Realisierung $\tilde{v}(t)$ (a) des ersten Falls (5.2.1a) hat die Form eines OUP mit dem Mittelwert gleich dem Fixpunkt $v_1^* = v_0 = 1/2$. Die Realisierungen $\tilde{v}(t)$ in (b) und (c) für den zweiten (5.2.1b) und dritten (5.2.1c) Fall, zeigen ein anderes Bild. Es treten in (b) unregelmäßige vereinzelte Ausschläge (Peaks) von einer ansonsten konstant verlaufenden Kurve auf. In (c) treten diese Peaks in dem gleichen Zeitintervall häufiger auf, sind aber gleichzeitig auch weniger hoch. Der Grenzfall ist hier gut zu erkennen. Die Formen der Kurven aus (a) und (b) treten hier in einer Mischform auf.

Durch die spektrale Anpassung werden die Amplituden aller Schwingungsmoden in (a), (b) und (c) verändert, sodass ein weiteres Rauschen auf den Zeitreihen $v(t)$ liegt. Der konstante Verlauf, wie er besonders in (b) gut zu erkennen ist, ist im Vergleich zu vorher nicht mehr existent, während die Ausschläge in ihrer Form erhalten bleiben.

Beim direkten Vergleich mit einem Ausschnitt der FINO1-Daten in Abbildung 5.2 fällt auf, dass die Realisierungen in (b) und (c) echtem Wind visuell am ähnlich-

ten sind. Ihre Peaks stellen ein intermittentes Verhalten der Zeitreihen dar. Es ist vergleichbar mit den auftretenden Böen von realem Wind. Da dieses Verhalten ein wichtiger Teil der Statistik für den Wind ist, ist bereits anhand dessen zu vermuten, dass der zweite (5.2.1b) und dritte (5.2.1c) Fall für die Parameter am ehesten zur Reproduktion realer Windgeschwindigkeiten geeignet sein werden.

Durch die Parameter werden die Häufigkeit, Intensität und Form der Peaks beeinflusst, weshalb diese im Folgenden besprochen werden.

Eine genaue Aussage über die Bedeutung der einzelnen Parameter für die Realisierungen zu treffen ist schwierig. Hilfreich ist aber die grobe Einteilung der Fälle aus Kapitel 5.2. Ausgehend vom Grenzfall (5.2.1c) (etwa $g = 1$, $D = 0,5$ und $\gamma = 1$) führt eine Verkleinerung von g und γ oder eine Vergrößerung von D zu einer Parameterkombination des zweiten Falls (5.2.1b). Das gleiche gilt umgekehrt für den ersten Fall (5.2.1a). Im Vergleich zum Grenzfall ist für eine Parameterkombination des zweiten Falls, wie in Abbildung 5.1 (b), die Anzahl der Peaks reduziert und ihre Amplitude erhöht.

Eine Veränderung der Parameterkombination, sodass für sie der erste Fall gilt, bewirkt im Gegensatz dazu ein durchgehendes Rauschen. Einzelne Peaks verschwinden und die Form der Zeitreihe gleicht einem OUP. Diese Beobachtungen sind sowohl für das 5/3-, als auch für das FINO1-Spektrum gültig.

Um das Verhalten genauer zu untersuchen, werden im nächsten Abschnitt die PDF $p(v)$ der Windgeschwindigkeiten v des Modells und der FINO1-Daten als erste statistische Größe verglichen. Im darauffolgenden Abschnitt erfolgt die Analyse der PDF der Inkremente $p(\Delta_\tau v)$.

5.3.1 Wahrscheinlichkeitsdichten der Geschwindigkeit v

Wie sich in Kapitel 4.2 zeigte, kann die PDF der FINO1-Daten für den Datensatz ab einer Länge von etwa 16 Monaten durch eine Weibull-Verteilung beschrieben werden. Die PDF ändert sich ab diesem Zeitraum durch Verlängerung des Datensatzes nur noch gering. Es wird im Folgenden für die FINO1-PDF der gesamte Datensatz der FINO1-Daten verwendet.

Für den Vergleich wird jeweils eine einzelne Realisierung einer Parameterkombination betrachtet. Die ersten beiden Momente der FINO1-Daten und der Zeitreihe der Simulation werden für den Vergleich der PDF auf $\mu_v = 0$ und $\sigma_v^2 = 1$ normiert. So können die Daten direkt miteinander verglichen werden. Der Mittelwert und die Varianz werden normiert, da sie durch den Vorgang der spektralen Anpassung verändert werden. Die Varianz wird durch das jeweilige bei der spektralen Anpassung verwendete Spektrum vorgegeben. Sie kann deshalb nicht durch die Parameter adjustiert werden.

Wahrscheinlichkeitsdichten mit 5/3-Spektrum

In der folgenden Abbildung 5.3 ist zum Vergleich der PDF der Simulation mit der der FINO1-Daten zusätzlich eine Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ eingezeichnet. Dies vereinfacht die qualitative Einschätzung der dritten und vierten Momente der

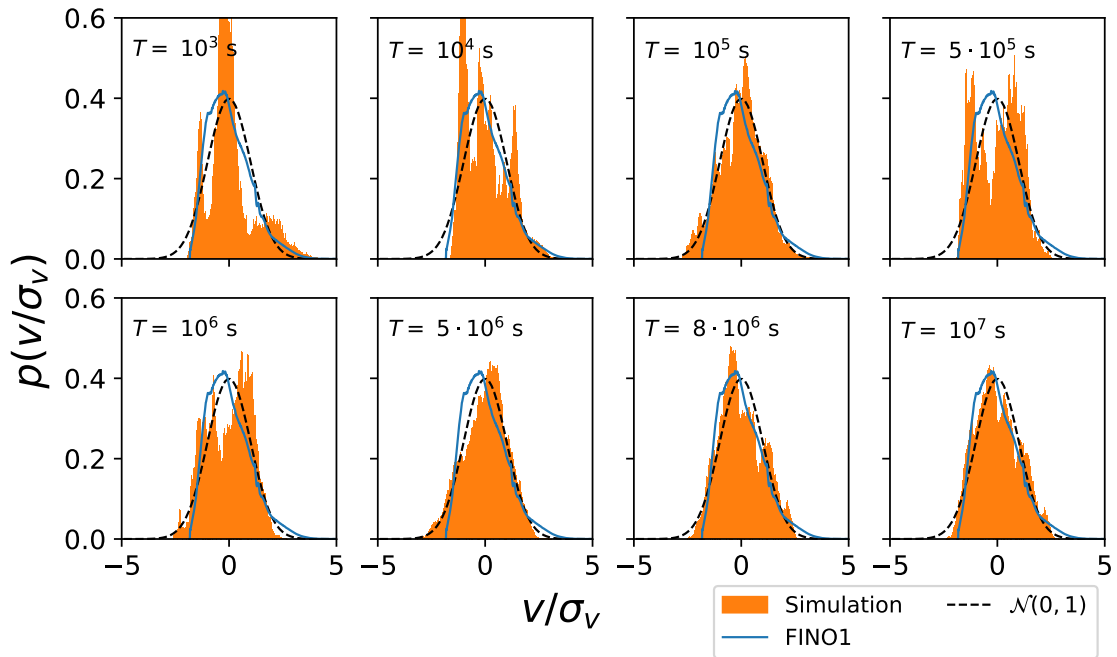


Abbildung 5.3: Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Simulation mit dem 5/3-Spektrum im Vergleich mit der FINO1-PDF und der Standardnormalverteilung.

Verteilung, beziehungsweise der Kurtosis und Schiefe.

Findet die spektrale Anpassung durch das 5/3-Spektrum statt, so wird mit Hinblick auf das Wiener-Khinchin-Theorem eine Korrelation auf unendlichen Skalen für die Zeitreihe induziert. Dies führt wie in Abbildung 5.3 gezeigt dazu, dass selbst lange Realisierungen keine stationäre Verteilung erreichen. Die PDF bleibt multimodal und verändert sich bei Verlängerung der Laufzeit weiterhin. Dies gilt für alle getesteten Parameterkombinationen der verschiedenen Fälle von Parametern.

Wie in Abbildung 5.3 beispielsweise für Parameter ($g = 0.2$, $D = 2$, $\gamma = 1$) des zweiten Falls (5.2.1b) zu sehen, haben Realisierungen mit dem 5/3-Spektrum gegenüber den FINO1-Daten eine reduzierte Wahrscheinlichkeit für extreme Ereignisse, was auch die berechnete Kurtosis κ widerspiegelt. Sie ist unabhängig von den Parametern für längere Simulationszeiten kleiner als drei und fluktuiert leicht im Verlauf der Zeit. Eine Kurtosis wie die der FINO1-Daten mit $\kappa = 3,36$ kann damit nicht erreicht werden. Die Schiefe hat für multimodale Verteilungen eine reduzierte Aussagekraft und wird hier deshalb nicht weiter analysiert.

Durch die Anpassung mit dem 5/3-Spektrum kann das Windmodell also weder die Form noch die ersten vier Momente der FINO1-Daten reproduzieren.

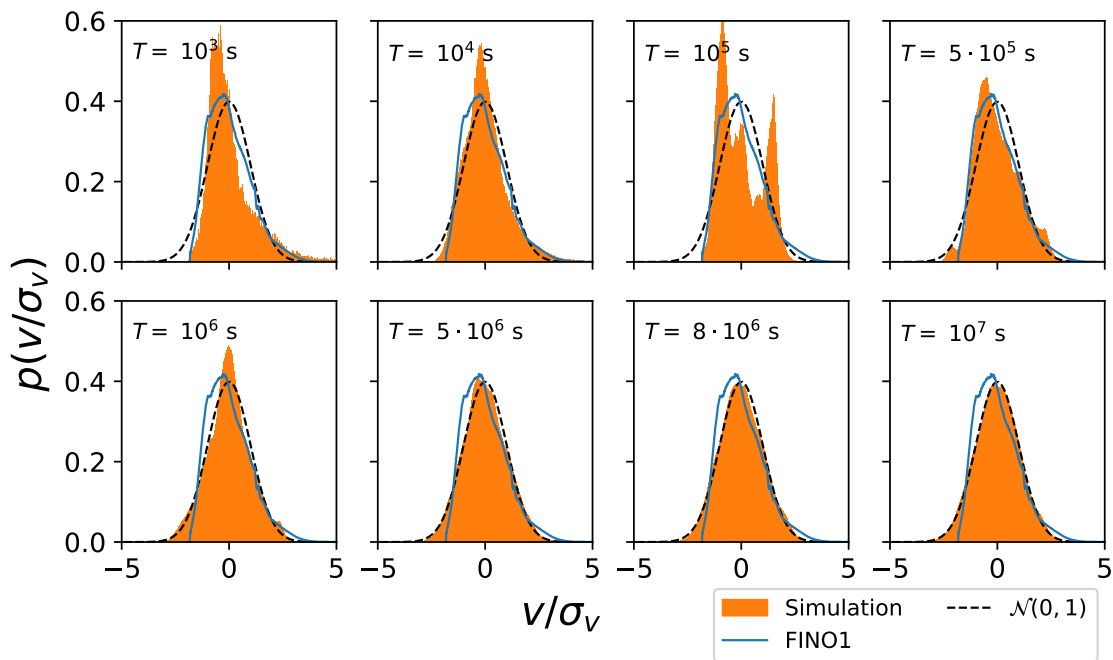


Abbildung 5.4: Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Simulation mit dem FINO1-Spektrum im Vergleich mit der FINO1-PDF und der Standardnormalverteilung.

Wahrscheinlichkeitsdichten mit realem FINO1-Spektrum

Wird dagegen das FINO1-Spektrum für die spektrale Anpassung verwendet, zeigt sich in Abbildung 5.4 für kürzere Simulationszeiträume des zweiten Falls (5.2.1b) erst ein der FINO1-PDF ähnliches Verhalten. Die Kurtosis ist wie bei der FINO1-PDF erhöht gegenüber einer Gaußverteilung und es liegt eine positive Schiefe vor. Wird die Simulationszeit verlängert, so zeigt sich eine multimodale PDF, die in ihrer Form in $-3\sigma_v < v < 3\sigma_v$ annähernd gaußförmig wird. Dieses Verhalten kann heuristisch in allen drei Fällen (5.2.1a), (5.2.1b), (5.2.1c) für die Parameter beobachtet werden. Auch aus theoretischen Überlegungen heraus ist eine gaußförmige PDF zu erwarten. Durch das FINO1-Spektrum werden endliche Korrelationen vorgegeben, wodurch auch unabhängige Zufallszahlen existieren. Die Varianz ist zudem endlich. Nach dem zentralen Grenzwertsatz führt dies näherungsweise zu einer gaußförmigen PDF, wenn die Stichprobe groß genug ist.

In Abbildung 5.4 ist diese Entwicklung für eine Realisierung mit Parametern des zweiten Falls (5.2.1b) gut zu erkennen. Die grundlegenden Formen der Simulations- und der FINO1-PDF sind sehr verschieden und unterscheiden sich stark voneinander. Es ist für Simulationszeiten von etwa vier Monaten (entsprechen 10^9 Datenpunkte) keine Form erreichbar, die einer Weibull-Verteilung ähnelt.

Betrachtet man die PDF derselben Realisierung mit Parametern des zweiten Falls (5.2.1b) aus Abbildung 5.4 mit einer logarithmisch skalierten y -Achse in Abbildung 5.5, so fällt auf, dass der Bereich jeweils oberhalb von $3\sigma_v$ und unterhalb von $-3\sigma_v$

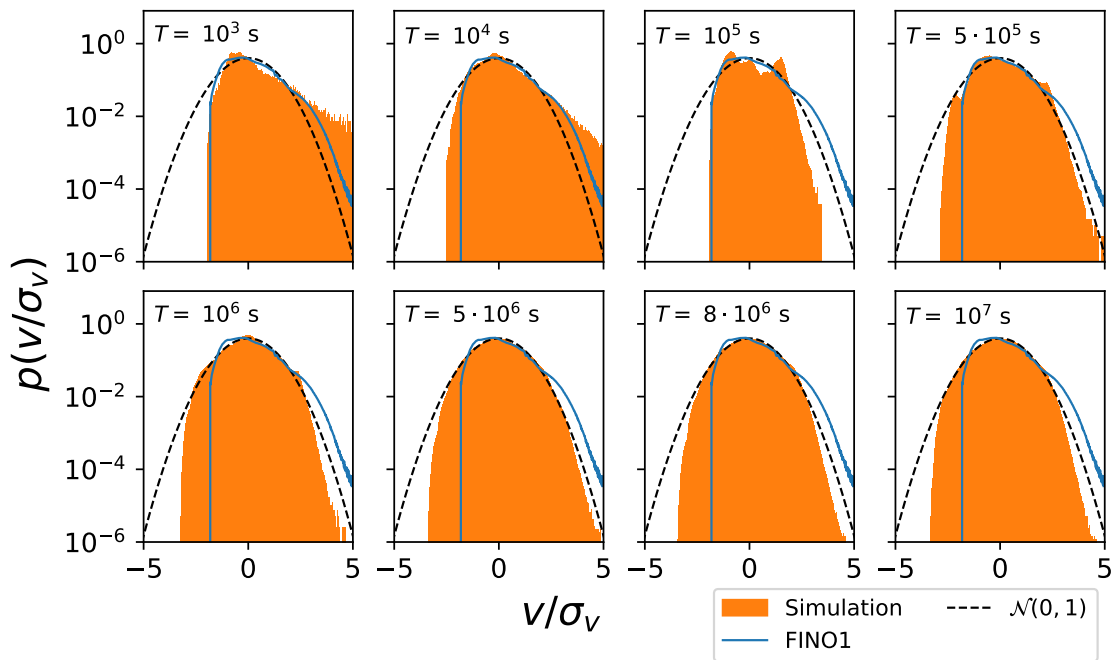


Abbildung 5.5: Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Simulation mit dem FINO1-Spektrum im Vergleich mit der FINO1-PDF und der Standardnormalverteilung.

der PDF der FINO1-Daten ähnelt. Es existiert eine positive Schiefe, die zwar im Laufe der Zeit fluktuiert und absinkt, aber für lange Simulationszeiten erhalten und positiv bleibt. Dies kann ebenso quantitativ bestätigt werden. Die Schiefe der Simulations-PDF erreicht aber nie die der FINO1-PDF mit $\chi = 0,7$.

Die Kurtosis ist nur für kleine Simulationszeiten T deutlich größer als drei. Für größere Simulationszeiten fluktuiert sie nah um drei herum und kann die Kurtosis $\kappa = 3,36$ der FINO1-Daten nicht reproduzieren.

Wichtig ist anzumerken, dass sich trotz der langen Simulationszeiten die Verteilungen im Bereich um $\pm 3\sigma_v$ auch für mehrere Realisierungen mit den selben Parametern unterscheiden. Die Tendenz für eine geringe positive Schiefe existiert zudem nur für Parameterkombinationen des zweiten Falls (5.2.1b). Für eine Parameterkombination, die dem ersten Fall (5.2.1a) entspricht, ist die Schiefe null.

Es lässt sich feststellen, dass die FINO1-PDF der Windgeschwindigkeiten v mit dem Modell nur schlecht reproduzierbar ist. Die einer Weibull-Verteilung ähnelnde Form kann nicht reproduziert werden, da die PDF der Simulationen mit dem 5/3-Spektrum multimodal bleiben und diejenigen mit dem FINO1-Spektrum gaußförmig werden. Einzig lässt sich die Form der Randbereiche über die Parameterwahl für die Simulation mit dem FINO1-Spektrum beeinflussen. Für Parameterkombinationen des zweiten Falls (5.2.1b) kann eine leichte positive Schiefe auch für lange Laufzeiten erreicht werden. Möglicherweise können durch längere Simulationen noch genauere Erkenntnisse gewonnen werden, da die PDF noch weiteren Veränderungen

unterliegt. Die maximale Länge der Simulation war auf etwa 10^9 Datenpunkte beschränkt, da der Arbeitsspeicherbedarf für die Simulation und die anschließende Fouriertransformation einen limitierenden Faktor darstellte. Die Schrittweite konnte aufgrund der Divergenz um den instabilen Fixpunkt nicht reduziert werden, was ein Schwachpunkt des Modells ist.

5.3.2 Geschwindigkeitsinkrement $\Delta_1 v$

Eine weitere wichtige statistische Größe sind die Geschwindigkeitsinkremente, wie sie in Kapitel 4.2 für den Wind untersucht wurden.

Als Orientierung für die Auswirkungen der Parameter auf die Inkremente werden zunächst Parameterkombinationen für die unterschiedlichen Fälle gewählt. Für diese Kombinationen werden die Verteilungen für unterschiedliche τ untersucht und mit denen der FINO1-Daten verglichen. Ein weiterer Anhaltspunkt zur Anpassung der Parameter sind das dritte und vierte Moment der Inkremente, die Schiefe χ (4.2.2) und die Kurtosis κ (4.2.3), da sich diese Größen quantitativ mit denen der FINO1-Daten vergleichen lassen.

Die Ergebnisse für die Schiefe und Kurtosis sind für die spektrale Anpassung mit dem 5/3-Spektrum oder dem FINO1-Spektrum ähnlich und weichen nur wenig voneinander ab. Es wird deshalb hierfür keine Unterscheidung der spektralen Anpassung vorgenommen wird.

Der Mittelwert und die Varianz der Inkrementverteilung zeigen keinen Zusammenhang mit den untersuchten Parametern und sind bis auf wenige kleine Fluktuationen bei Betrachtung eines festen τ für Realisierungen verschiedener Parameter konstant. Die Varianz wird jedoch durch die spektrale Anpassung verändert. Findet die Anpassung mit dem FINO1-Spektrum statt, wird eine hohe Übereinstimmung mit der Varianz der FINO1-Inkremente erreicht, während die Varianz durch die Anpassung mit dem 5/3-Spektrum im Vergleich durchweg zu gering ausfällt.

Es kann ein Zusammenhang zwischen den Parametern D , γ , g und den Größen χ und κ festgestellt werden. Betrachtet man Abbildung 5.6, in der $\chi(\tau = 1 \text{ s})$ in (a) und $\kappa(\tau = 1 \text{ s})$ in (b) für unterschiedliche Parameterpaare von D , γ und g dargestellt sind, so ist eine Abhängigkeit zwischen den Parametern und der Schiefe und Kurtosis gut zu erkennen.

Für die Parameter $D = 1$, $g = 1$ und $\gamma = 1$ ist die Schiefe maximal und beträgt etwa $\chi(\tau = 1 \text{ s}) = -0,08$ in (a1,a2). Die Kurtosis ist für diese Parameterwerte minimal und beträgt etwa $\kappa(\tau = 1 \text{ s}) = 4$ in (b1,b2). Durch Erhöhung von D oder Verringerung von γ oder g kann die Kurtosis erhöht und gleichzeitig die Schiefe verringert werden. Eine Möglichkeit zur Veränderung der beiden Größen unabhängig voneinander ist für $\tau = 1 \text{ s}$ dagegen nicht festzustellen. Die größte Kurtosis $\kappa = 16,2$ in (b1) wird für das kleinste $g = 0,3$ und das größte $D = 5,5$ im Parameterbereich erreicht, für den Simulationen durchgeführt wurden. In (b2) dagegen wird die größte Kurtosis $\kappa = 10,9$ für das kleinste $\gamma = 0,3$ und das größte $D = 5,5$ erreicht. Die Schiefe in (a2) ist für die Parameter $D = 5,5$, $g = 1$ und $\gamma = 0,3$ mit der geringeren Kurtosis in (b2) fast doppelt so klein, wie die Schiefe in (a1) mit der größeren Kurtosis in (b1). Es lässt sich daraus folgern, dass die Veränderung von γ die Schiefe stärker beeinflusst als die Veränderung von g , zumindest, wenn die

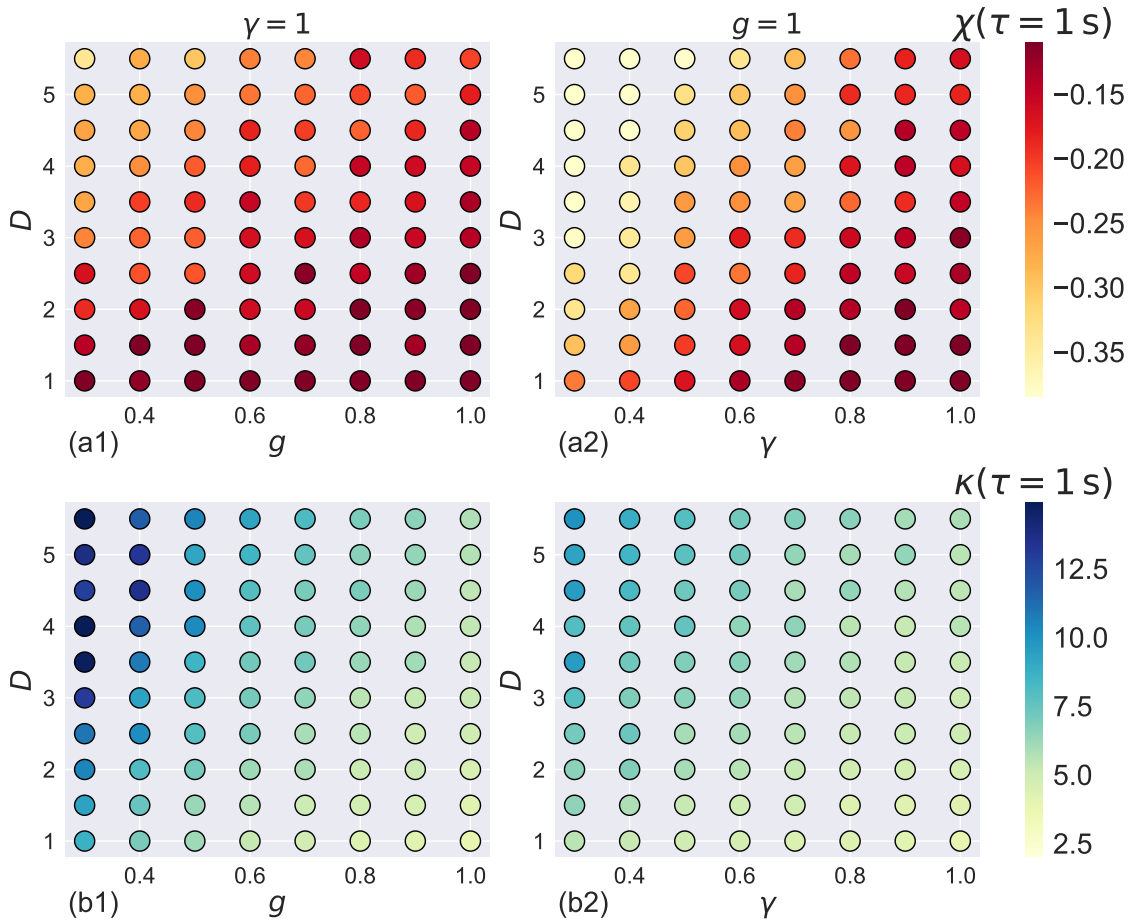


Abbildung 5.6: Veränderung der Schiefe $\chi(\tau = 1 \text{ s})$ und Kurtosis $\kappa(\tau = 1 \text{ s})$ für variierende Parameter D , γ und g .

Kurtosis als Vergleichsmerkmal herangezogen wird. Dies ist von Relevanz, wenn die Kurtosis und Schiefe der Simulation an die der FINO1-Daten angepasst wird. Um weitere Zusammenhänge mit den Parametern zu prüfen, wird die Entwicklung der Schiefe und der Kurtosis im Folgenden für verschiedene τ betrachtet.

5.3.3 Momente der Inkremente

Anders als in Kapitel 4.2 kann nicht davon ausgegangen werden, dass das Modell Ergebnisse für $D_3(\tau)$ aus den Navier-Stokes-Gleichungen reproduzieren kann, da es auf keiner physikalischen Theorie fußt. Es basiert auf einer phänomenologischen Modellierung des Windes, in die, durch die spektrale Anpassung mit dem FINO1-Spektrum, Informationen über die Varianz der Inkremente aus realen Winddaten mit einfließen können. Mit der Anpassung durch das einfache 5/3-Spektrum wird dagegen sozusagen nur durchgängige 3D-Turbulenz für das Spektrum vorgegeben. Da die Schiefe $\chi(\tau)$ in einer Visualisierung der Inkrementverteilungen besser als $D_3(\tau)$ zu beurteilen ist, wird sie anstatt $D_3(\tau)$ betrachtet.

Werden Parameter des zweiten Falls (5.2.1b) gewählt und verändert, kann man wieder den zuvor in Kapitel 5.3.2 beobachteten Zusammenhang zwischen den Para-

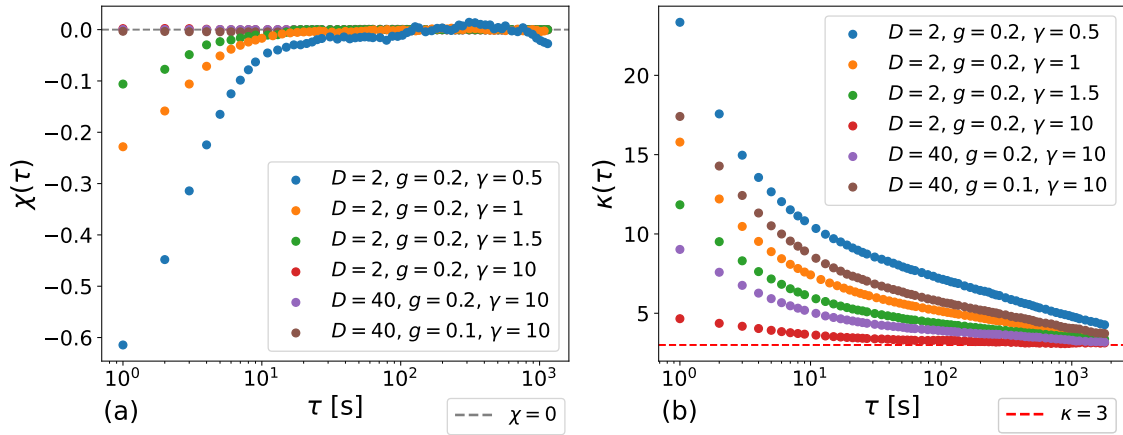


Abbildung 5.7: Vergleich der Schiefe $\chi(\tau)$ und Kurtosis $\kappa(\tau)$ der Inkrementverteilungen von Simulationen verschiedener Parameter mit spektraler Anpassung durch das FINO1-Spektrum für ansteigendes τ .

metern und der Kurtosis und Schiefe der Inkrementverteilungen feststellen.

Durch Veränderung von g oder D erhöht oder verringert sich der Wert der Schiefe und der Kurtosis für $\tau = 1$ s. Gleichsam verändert sich aber auch das Wachstumsverhalten der Schiefe und der Kurtosis als Funktionen von τ . Beide zeigen eine ähnliche Kurvenform. Während die Schiefe aus dem Negativen ansteigt und gegen $\chi = 0$ konvergiert, liegt die Kurtosis für $\tau = 1$ s bei $\kappa > 3$ und konvergiert gegen $\kappa = 3$.

Auch der Parameter γ verändert das Wachstumsverhalten der Schiefe und der Kurtosis, wie in Abbildung 5.7 für verschiedene Parameterkombinationen zu sehen ist. Für kleinere (größere) γ erhöhen (verringern) sich die Steigungen der Kurven. Die Schiefe und die Kurtosis scheinen, wie bereits in Kapitel 5.3.2 beobachtet wurde, beide durch die Parameterwahl verändert zu werden. Wird ein Wert $\gamma = 10$ gewählt und die Parameter D und g soweit vergrößert beziehungsweise verkleinert, es sich aber weiter um eine Parameterkombination des zweiten Falls (5.2.1b) handelt, so zeigt sich ein anderes Verhalten. Wie man in (a) sieht, ist die Schiefe für $D = 40$, $g = 0,1$ und $\gamma = 10$ näherungsweise null. Dagegen ist die Kurtosis in (b) für diese Parameterkombination durchweg größer als die Kurtosis der meisten weiteren gezeigten Parameterkombinationen. Hieran erkennt man, dass die Veränderung von γ einen stärkeren Einfluss auf die Schiefe als auf die Kurtosis hat. Es kann für kleine τ durch ein großes γ eine große Kurtosis bei gleichzeitig kleiner negativer Schiefe erreicht werden.

Eine mögliche Begründung für das Verhalten der Schiefe in Bezug auf γ ist in der Korrelationsfunktion des OUP in Gleichung (3.1.10) zu finden. Die Größe k in der Gleichung entspricht hier dem γ . Mit diesem Parameter skaliert die Korrelationsfunktion des OUP in der Zeit. Die grundlegende Form der Schiefe als Funktion von τ ist auf den asymmetrischen Prozess in Gleichung (5.1.2) zurückzuführen, da er eine Vorzeichenpräferenz aufweist. Für eine negative Schiefe gilt bei Extremwerten, dass $v_t < v_{t+\tau}$ häufiger als $v_t > v_{t+\tau}$ auftritt. Je länger der OUP korreliert ist, desto länger kann das Vorzeichen des ansonsten symmetrischen OUP erhalten bleiben. Die

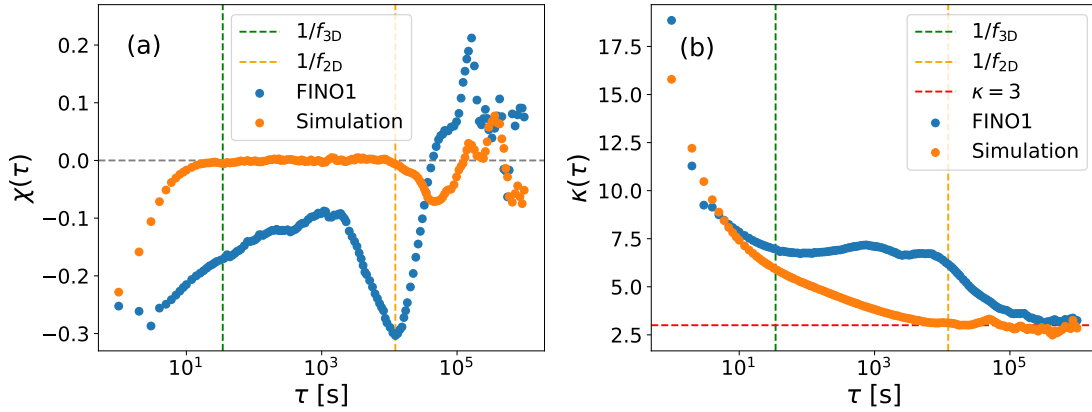


Abbildung 5.8: Vergleich der Schiefe $\chi(\tau)$ und Kurtosis $\kappa(\tau)$ der Simulation mit spektralen Anpassung durch das FINO1-Spektrum und den FINO1-Daten für ansteigendes τ mit den Simulationsparametern $D = 2$, $g = 0,2$ und $\gamma = 1$.

intermittenten Ausbrüche der Zeitreihe halten länger an und für Extremwerte tritt $v_t < v_{t+\tau}$ auch häufiger als $v_t > v_{t+\tau}$ auf.

Um die optimale Parameterkombination für die Reproduktion der FINO1-Daten zu finden, müssen die Schiefe und Kurtosis gleichzeitig berücksichtigt werden. Da sich die Schiefe und die Kurtosis des Modells anders als die der FINO1-Daten verhalten, lassen sie sich nur partiell an die FINO1-Daten anpassen. Die Anpassung wird deshalb auf den Kurzzeitbereich bis $\tau = 6 \cdot 10^1$ s beschränkt.

Der Parameterwert $\gamma = 1$ stellt sich als bester Wert für γ heraus. Es kann so im Kurzzeitbereich eine ausreichend große Kurtosis bei einer gleichzeitig im Vergleich mit den FINO1-Daten nicht zu großen negativen Schiefe erreicht werden. Der Parameter g wird so weit verringert und D so viel vergrößert, dass die Werte der Schiefe und der Kurtosis bis $\tau = 6 \cdot 10^1$ s möglichst denen der FINO1-Daten entsprechen.

Die Abbildung 5.8 zeigt die Schiefe und Kurtosis einer Realisierung der für die Reproduktion der FINO1-Daten am besten geeigneten Parameter. Sie betragen $g = 0,2$, $\gamma = 1$ und $D = 2$. Es handelt sich um Parameter des zweiten Falls (5.2.1b).

Für die gefundenen Parameter $D = 2$, $g = 0,2$ und $\gamma = 1$ stimmt die Schiefe des Modells in (a) zumindest für $\tau = 1$ s annähernd mit der der FINO1-Daten überein. Die Schiefe des Modells steigt für größere τ schneller als die der FINO1-Daten und konvergiert gegen $\chi = 0$. Sie kann damit keine weiteren Übereinstimmungen mit den FINO1-Daten im Kurzzeitbereich erzielen oder etwa den Nulldurchgang für den Übergang zur 2D-Turbulenz, wie in den FINO1-Daten zu sehen, reproduzieren.

Die Kurtosis des Modells in (b) dagegen zeigt bis $\tau = 10^1$ s für diese Parameter einen ähnlichen Verlauf wie die Kurtosis der FINO1-Daten. Für größere τ weicht die Kurtosis des Modells zunehmend von der Kurtosis der FINO1-Daten ab. Der Wert von $\kappa(\tau = 1$ s) vom Modell ist etwas geringer als jener der FINO1-Daten. Dies ist ein Kompromiss um eine insgesamt bessere Abdeckung der Kurtosis der FINO1-Daten bis $\tau = 6 \cdot 10^1$ s zu erzielen. Für Parameter bei denen für $\tau = 1$ s die Kurtosis von

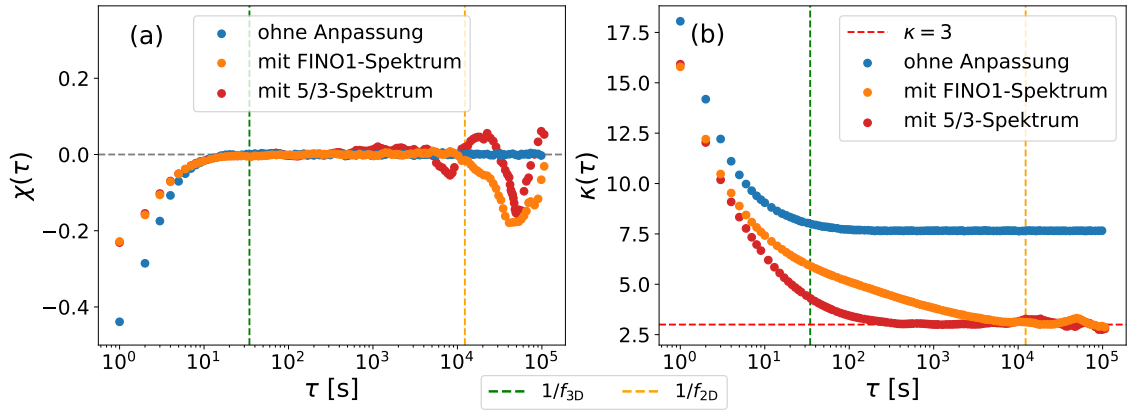


Abbildung 5.9: Vergleich der Schiefe $\chi(\tau)$ und Kurtosis $\kappa(\tau)$ der Simulation für ansteigendes τ ohne spektrale Anpassung, mit spektraler Anpassung durch das FINO1-Spektrum und mit spektraler Anpassung durch das 5/3-Spektrum.

der Simulation und den FINO1-Daten gleich wären, läge die Kurtosis des Modells für größere τ anfänglich deutlich über jene der FINO1-Daten. Es würde so eine geringere Übereinstimmung im Kurzzeitbereich erreicht werden.

Erst durch den Abfall der Kurtosis der FINO1-Daten nach dem größeren Plateau ab $\tau = 1/f_{2D}$ nähern sie sich wieder einander an, um ab $\tau > 2 \cdot 10^5$ beide $\kappa = 3$ zu entsprechen, was einem gaußschen Verhalten entspricht.

Parametersätze des dritten Falls (5.2.1c) können die FINO1-Daten weniger gut reproduzieren. Die Werte der Schiefe und Kurtosis des Modells erreichen nicht die der FINO1-Daten. Außerdem konvergieren die Schiefe und Kurtosis für ein ansteigendes τ schneller als für Parameter des zweiten Falls (5.2.1b). Parametersätze des ersten Falls (5.2.1a) zeigen für alle τ eine Schiefe von $\chi = 0$ und eine Kurtosis $\kappa = 3$. Sie können die Inkrementstatistik der FINO1-Daten damit nicht reproduzieren. Damit bestätigt sich die anfängliche Vermutung aus Kapitel 5.3, dass Parametersätze des ersten Falls (5.2.1a) für eine Modellierung der FINO1-Inkrementstatistik ungeeignet sind. Die in Kapitel 5.3 gezeigte Realisierung für eine Parameterkombination des ersten Falls in Abbildung 5.1 (c) unterstützt dieses Ergebnis. Der eigentliche asymmetrische Prozess ist als solcher hier nicht mehr zu erkennen und ähnelt wie beschrieben einem OUP um den Fixpunkt $v_1^* = v_0 = 0,5$. Es ist damit keine intermittente Inkrementstatistik mehr möglich.

In Abbildung 5.9 ist die Schiefe und die Kurtosis ohne die spektrale Anpassung und mit der spektralen Anpassung durch das FINO1- und das 5/3-Spektrum dargestellt. Es können so weitere Erkenntnisse über den Einfluss der spektralen Anpassung auf Inkrementstatistik gewonnen werden. Es zeigt sich vor und nach der spektralen Anpassung für die Kurtosis und die Schiefe jeweils ein grundsätzlich ähnliches Wachstumsverhalten. Es wurde derselbe Satz von Parametern verwendet wie zuvor in Abbildung 5.8.

Die Schiefe $\chi(\tau)$ der Inkrementverteilungen der angepassten Zeitreihen in (a) weicht

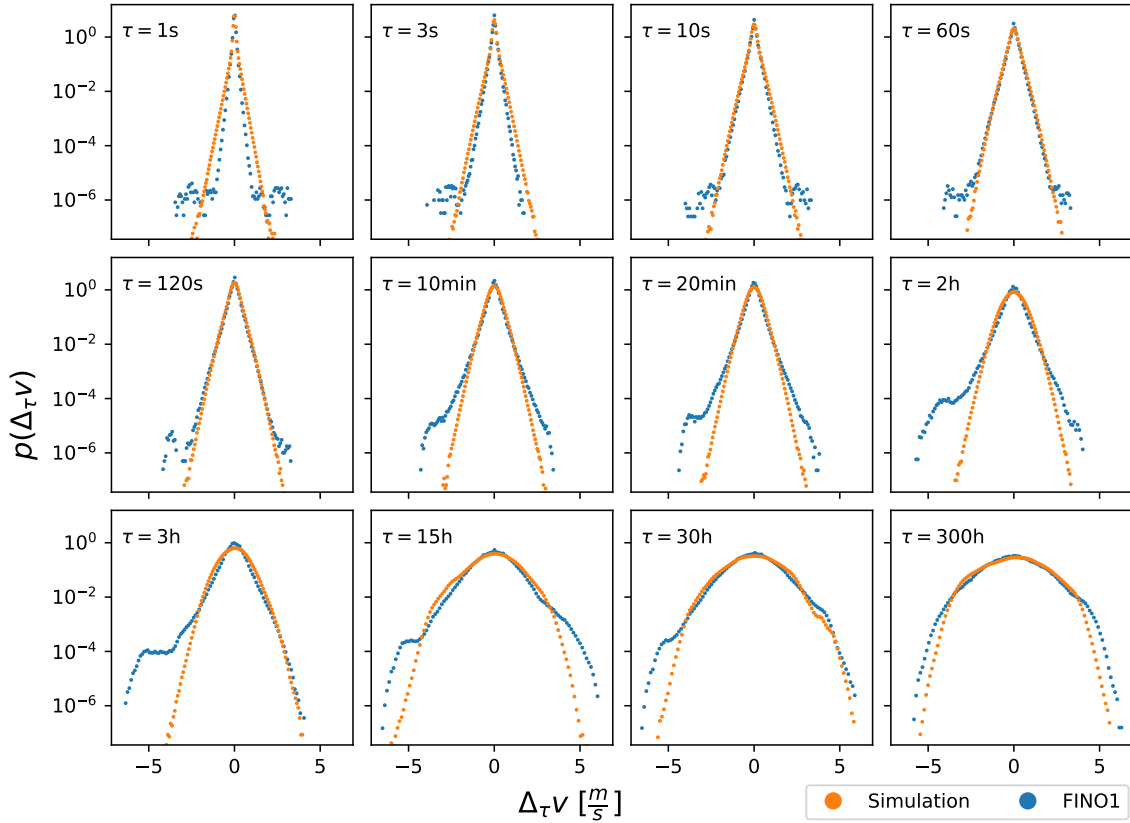


Abbildung 5.10: Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente der mit dem FINO1-Spektrum angepassten Simulation im Vergleich mit den FINO1-Daten für verschiedene τ .

für $\tau < 10^1$ s und für $\tau > 10^4$ s quantitativ von der unangepassten Zeitreihe ab. Die Abweichung für $\tau < 10^1$ s ist allein auf die veränderte Varianz der Inkrementverteilung zurückzuführen, was durch Betrachtung der hier nicht gezeigten Momente der Inkrementverteilung D_2 und D_3 erkennbar wird. Das dritte Moment selbst zeigt durch die spektrale Anpassung nahezu keine Veränderung im Kurzzeitbereich. Für $\tau > 10^4$ s weicht D_3 und damit auch die Schiefe von $\chi = 0$ ab. Sie fluktuiert um null. Vermutlich werden durch die spektrale Anpassung jeweils Korrelationen vorgegeben, die für diese Abweichungen sorgen.

Die Kurtosis in (b) zeigt ohne spektralen Anpassung ein anderes Verhalten als mit einer der spektralen Anpassungen. Ohne spektrale Anpassung konvergiert $\kappa(\tau)$ gegen einen parameterabhängigen Wert $\kappa > 3$. Sowohl D_2 , als auch D_4 werden durch die spektrale Anpassung mit dem FINO1- oder dem 5/3-Spektrum in ihrer Entwicklung verändert und sorgen somit für die Konvergenz von κ gegen $\kappa = 3$ für große τ . Durch die Anpassung mit dem 5/3-Spektrum fällt $\kappa(\tau)$ steiler als mit dem FINO1-Spektrum ab und konvergiert schneller gegen $\kappa = 3$.

Es lässt sich aus diesen Beobachtungen schließen, dass die spektrale Anpassung nur gerade und keine ungeraden Momente der Inkrementverteilungen verändern kann. Abschließend werden die Formen der Inkrementverteilungen der Simulation mit denen der FINO1-Daten verglichen.

5.3.4 Inkrementverteilungen für verschiedene τ

In Abbildung 5.10 sind die Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente für verschiedene τ für die Parameter $g = 0,2$, $\gamma = 1$ und $D = 2$ dargestellt.

Die Varianz der Inkrementverteilung wird durch die spektrale Anpassung mit dem FINO1-Spektrum für das Modell vorgegeben. Die weiteren Momente und die Form der Inkrementverteilung der Simulation und der FINO1-Daten sind so direkt miteinander vergleichbar. Die Formen der Inkrementverteilungen von Simulation und den FINO1-Daten ähneln sich stark. Die Inkrementverteilung der Simulation ist für $\tau = 1$ s in ihrer grundsätzlichen Form etwas breiter, als die der FINO1-Daten. Die FINO1-Daten zeigen, anders als die Simulation, in den Randbereichen eine Häufung an Punkten. Für größere τ ähneln sich die Inkrementverteilungen dagegen immer mehr. Bis $\tau = 120$ s herrscht eine gute Übereinstimmung zwischen der Simulation und den FINO1-Daten. Darüber hinaus treten wieder Abweichungen auf. Das Versagen des Modells, die Schiefe für $\tau > 1$ s zu reproduzieren, ist gut zu erkennen. Besonders auffällig ist dies für $\tau = 3$ h, bei dem die FINO1-Inkrementverteilung die größte negative Schiefe aufweist und sich linksseitig eine Art Plateau bildet. Die Inkrementverteilung des Modells behält ihre ursprüngliche Form hier nahezu bei, sie verbreitert sich aber zunehmend und flacht langsam für noch größere τ ab.

Das Kurzzeitverhalten der Inkrementstatistik kann das Modell gut reproduzieren. Die grundlegende Form und die Momente stimmen hier bis auf die Schiefe und die Randbereiche näherungsweise überein.

Auffällig ist, dass sich die Inkrementverteilungen des Modells und der FINO1-Daten für sehr große τ erneut ähneln und beide eine gaußische Form zeigen. Das Langzeitverhalten der Inkremente wird somit durch das Modell in Teilen reproduziert.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Windgeschwindigkeiten mithilfe des Windmodells aus [SPK17] simuliert. Statistische Eigenschaften dieses Windmodells wurden mit denen echter Daten der Forschungsplattform FINO1 unter der Fragestellung verglichen, inwiefern das Windmodell die statistischen Eigenschaften der experimentellen Daten reproduzieren kann.

Es zeigt sich, dass unterschiedliche Sätze von Parametern verschiedene statistische Eigenschaften aufweisen und in drei Fälle aufgeteilt werden können. Diese Fälle werden mithilfe von Abschätzungen der Größenordnungen des stochastischen und des deterministischen Teils der Differentialgleichungen des Modells definiert. Anhand der Betrachtung dieser Fälle kann bereits zu Beginn eine womöglich geeignete Parameterkombination für die Reproduktion der stochastischen Eigenschaften des Windes vermutet werden. Der Fall, bei welchem der stochastische Teil in der Differentialgleichung dominiert, erweist sich als geeignet.

Die weibullförmige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeiten der realen Daten kann für keine Parameterkombination reproduziert werden. Eine Anpassung des Modells mit dem 5/3-Spektrum führt dazu, dass die Verteilung für die längste Simulationszeit multimodal bleibt, während die Anpassung mit dem FINO1-Spektrum zur Folge hat, dass die Verteilung gaußförmig wird.

Für die Inkrementstatistik zeigen sich bessere Ergebnisse. Es lässt sich ein direkter Zusammenhang zwischen der Schiefe und Kurtosis der Inkremente und den Parametern feststellen. Durch Anpassung der Parameter können sowohl die Schiefe als auch die Kurtosis quantitativ verändert werden. Dies ist jedoch nicht unabhängig voneinander möglich. Beide weisen für den zweiten Fall ein deutliches Wachstumsverhalten von einem Startwert zu einem Endwert, gegen den sie konvergieren, auf. Durch Anpassung des Parameters γ lässt sich die Schiefe stärker beeinflussen als die Kurtosis. Trotzdem lässt sich die Schiefe der Inkremente der FINO1-Daten nur für $\tau = 1$ s reproduzieren. Darüber hinaus konvergiert die Schiefe des Modells zu schnell gegen null. Die Kurtosis des Modells dagegen kann für die gefundenen optimalen Parameter $g = 0,2$, $D = 2$ und $\gamma = 1$ im Kurzzeitbereich bis etwa $\tau = 60$ s die Kur-

tosis der experimentellen Daten reproduzieren. Für größere τ weicht die Kurtosis des Modells zunehmend ab. Für sehr große τ erreichen die Inkremente des Modells, wie auch die der FINO1-Daten, eine Kurtosis von drei und werden damit gaußförmig.

Weder der Mittelwert noch die Varianz der Inkremente sind parameterabhängig. Die Varianz wird durch die spektrale Anpassung verändert. Mit der Anpassung durch das FINO1-Spektrum wird eine hohe Übereinstimmung der Varianzen von FINO1-Daten und Modell erreicht. Mit der Anpassung durch das 5/3-Spektrum dagegen ist die Varianz der Inkremente des Modells durchweg zu gering. Allein die spektrale Anpassung sorgt dafür, dass die Kurtosis des Modells für sehr große τ gegen drei konvergiert. Dies geschieht durch ihren Einfluss auf die Strukturfunktionen D_2 und D_4 . Ohne die spektrale Anpassung würde die Kurtosis gegen einen Wert größer drei konvergieren. Auf ungerade Momente der Inkrementverteilungen wie D_3 hat die spektrale Anpassung keinen nennenswerten Einfluss. Die Formen der Inkrementverteilungen des Modells stimmen im Kurzzeitbereich gut mit denen der FINO1-Daten überein. Darüber hinaus zeigt sich die Unfähigkeit des Modells, die Schiefe der experimentellen Daten für $\tau > 1$ s zu reproduzieren, deutlich. Für sehr große τ ähneln sich die Inkrementverteilungen des Modells und der FINO1-Daten.

Abschließend lässt sich sagen, dass das Modell die Inkrementstatistik der FINO1-Daten im Kurzzeitbereich relativ gut reproduzieren kann, sofern man die Relevanz einer akkuraten Schiefe in dieser Bewertung nicht zu hoch gewichtet.

Für ein verbessertes Modell sollte die Fähigkeit des Modells zur Reproduktion der Schiefe überarbeitet werden. Wichtig wäre im Kurzzeitbereich eine langsamere Konvergenz der Schiefe gegen null für ansteigende τ . Als erstes sollte aber die Problematik des instabilen Fixpunkts behandelt werden. Das Modell ist sonst nur in einem eingeschränkten Parameterbereich nutzbar, da die simulierte Zeitreihe ansonsten sehr schnell divergieren kann. Es wäre also sinnvoll, einen weiteren stabilen Fixpunkt hinzuzufügen, der die mögliche Divergenz der Zeitreihe verhindert. Ein weiterer Punkt ist die Annahme eines Spektrums $S(f) \sim f^{-\frac{5}{3}}$ im Frequenzbereich unterhalb von 1 Hz. Da die FINO1-Daten nur mit einer Auflösung von 1 Hz vorhanden sind, musste eine solche Annahme getroffen werden und konnte nicht dem Spektrum entnommen werden. Die Problematik besteht nun darin, dass solche hohen Frequenzen bereits im Dissipationsbereich der Kolmogorowskala liegen können. Das Spektrum im Dissipationsbereich entspricht nicht dem in dieser Arbeit angenommenen.

Danksagung

Zuallererst möchte ich Herrn Prof. Dr. Philipp Maaß für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe, sowie die sehr gute Betreuung und stetige Hilfsbereitschaft danken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn So-Kumneth Sim für die umfangreiche Unterstützung bei allen aufkommenden Fragen und die zahlreichen, sehr hilfreichen Diskussionen.

Ich bedanke mich außerdem bei dem FINO-Projekt für die Bereitstellung der Windgeschwindigkeitsdaten.

Weiterhin möchte ich meinen Kommilitonen Lukas, Björn und Johannes für die immer witzige Zeit im Büro, aber auch für ihre Hilfe bei fachlichen Problemen danken.

Zuletzt danke ich meiner Familie und meiner Freundin Lena, die immer hinter mir standen und mich in jeder Lage unterstützt haben.

Erklärung zur selbständigen Abfassung der Bachelorarbeit

Name: Knut Domke

Geburtsdatum: 09.04.1998

Matrikelnummer: 974768

Titel der Bachelorarbeit: Prüfung eines stochastischen Modells für Windgeschwindigkeiten anhand von über der Nordsee gemessenen Daten mit hoher Zeitauflösung

Ich versichere, dass ich die eingereichte Bachelorarbeit selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe verfasst habe. Anderer als der von mir angegebenen Hilfsmittel und Schriften habe ich mich nicht bedient. Alle wörtlich oder sinngemäß den Schriften anderer Autoren entnommenen Stellen habe ich kenntlich gemacht.

Osnabrück, 16. Mai 2022

Knut Domke

Literatur

- [Ait02] Yacine Ait-Sahalia. „Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-form Approximation Approach“. In: *Econometrica* 70.1 (Jan. 2002), S. 223–262.
- [Bal17] Paolo Baldi. *Stochastic Calculus*. Springer International Publishing, 2017.
- [Boe+03] F. Boettcher u. a. „On the Statistics of Wind Gusts“. In: *Boundary-Layer Meteorology* 108.1 (Juli 2003), S. 163–173.
- [Bro28] Robert Brown. „A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies“. In: *The Philosophical Magazine* 4.21 (Sep. 1828), S. 161–173.
- [CC17] Rory T. Cerbus und Pinaki Chakraborty. „The third-order structure function in two dimensions: The Rashomon effect“. In: *Physics of Fluids* 29.11 (Nov. 2017), S. 111110.
- [Ein05] A. Einstein. „Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen“. In: *Annalen der Physik* 322.8 (1905), S. 549–560.
- [Ene20] Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen. *Bruttostromerzeugung in Deutschland*. 2020. URL: www.destatis.de/DE/Themen/Branchen-Unternehmen/Energie/Erzeugung/Tabellen/bruttostromerzeugung.html (besucht am 05.04.2022).
- [Gry+15] Sven-Erik Gryning u. a. „Weibull Wind-Speed Distribution Parameters Derived from a Combination of Wind-Lidar and Tall-Mast Measurements Over Land, Coastal and Marine Sites“. In: *Boundary-Layer Meteorology* 159.2 (2015), S. 329–348.
- [Kol91a] Andrey Kolmogorow. „Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 434.1890 (1991), S. 15–17.
- [Kol91b] Andrey Kolmogorow. „The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 434.1890 (1991), S. 9–13.
- [Kra67] Robert H. Kraichnan. „Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence“. In: *Physics of Fluids* 10.7 (1967), S. 1417.
- [Lan08] Paul Langevin. „Sur la théorie du mouvement brownien“. In: *Comptes-rendus de l'Académie des sciences* (1908).

-
- [Lar+19] Xiaoli G. Larsén u. a. „Turbulence Characteristics of Wind-Speed Fluctuations in the Presence of Open Cells: A Case Study“. In: *Boundary-Layer Meteorology* 171.2 (Jan. 2019), S. 191–212.
- [Lin99] Erik Lindborg. „Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence?“ In: *Journal of Fluid Mechanics* 388 (Juni 1999), S. 259–288.
- [LLP16] Xiaoli G. Larsén, Søren E. Larsen und Erik L. Petersen. „Full-Scale Spectrum of Boundary-Layer Winds“. In: *Boundary-Layer Meteorology* 159.2 (Feb. 2016), S. 349–371.
- [Mar55] Gisiro Maruyama. „Continuous Markov processes and stochastic equations“. In: *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 4.1 (Jan. 1955), S. 48–90.
- [Nae+98] A. Naert u. a. „Conditional statistics of velocity fluctuations in turbulence“. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 113.1 (Feb. 1998), S. 73–78.
- [Per09] Jean Baptiste Perrin. „Mouvement brownien et réalité moléculaire“. In: *Annales de chimie et de physique* (1909).
- [Sch+11] David Schlipf u. a. *Testing of frozen turbulence hypothesis for wind turbine applications with a scanning LIDAR system*. en. 2011.
- [SG06] Hermann Schlichting und Klaus Gersten. *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, 2006.
- [Sim20] So-Kumneth Sim. „Analyse und turbulenztheoretische Interpretation von Windgeschwindigkeiten über der Nordsee unter Berücksichtigung von Grenzflächeneffekten“. Masterarbeit. Universität Osnabrück, 2020.
- [Son+15] Jung Heon Song u. a. „Understanding Natural Gas Futures Trading Through Data Analysis“. In: *SSRN Electronic Journal* (2015).
- [SPK17] Katrin Schmietendorf, Joachim Peinke und Oliver Kamps. „The impact of turbulent renewable energy production on power grid stability and quality“. In: *The European Physical Journal B* 90.11 (Nov. 2017).
- [SPM22] So-Kumneth Sim, Joachim Peinke und Philipp Maass. *Offshore wind: Evidence for two-dimensional turbulence and role of sea horizon*. 2022.
- [UO30] G. E. Uhlenbeck und L. S. Ornstein. „On the Theory of the Brownian Motion“. In: *Physical Review* 36.5 (Sep. 1930), S. 823–841.
- [VP19] P. Vatiwutipong und N. Phewchean. „Alternative way to derive the distribution of the multivariate Ornstein-Uhlenbeck process“. In: *Advances in Difference Equations* 2019.1 (Juli 2019).
- [Wat18] Climate Watch. *Historical greenhouse gas emissions*. 2018. URL: www.climatewatchdata.org/ghg-emissions?breakBy=sector&end_year=2018&start_year=1990 (besucht am 05.04.2022).
- [WU45] Ming Chen Wang und G. E. Uhlenbeck. „On the Theory of the Brownian Motion II“. In: *Reviews of Modern Physics* 17.2-3 (Apr. 1945), S. 323–342.
- [XB18] Jin-Han Xie und Oliver Bühler. „Exact third-order structure functions for two-dimensional turbulence“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 851 (Juli 2018), S. 672–686.

- [YZ97] P. K. Yeung und Ye Zhou. „Universality of the Kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence“. In: *Physical Review E* 56.2 (1997), S. 1746–1752.